Argomento 8
Integrali indefiniti

8.1 Integrale indefinito

Definizione 8.1 Assegnata la funzione f definita nell' intervallo I, diciamo che una funzione F con $F : I \to \mathbb{R}$ è **una primitiva di f in I** se

$$\begin{array}{ll} i) & F \text{ è derivabile in } I; \\ ii) & F'(x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in I. \end{array}$$

Per *verificare* se una data funzione F è una primitiva di f nell'intervallo I bisogna quindi controlllare che F sia derivabile in I e che la sua derivata coincida con f in tutti i punti di I.

Esempio 8.2 La funzione $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in $\mathbb{R}$.
Infatti, la funzione $\sin x$ è sempre derivabile e inoltre si ha che $(\sin x)' = \cos x$, per ogni x.

Data una funzione f, cercare una sua primitiva in I significa quindi cercare una funzione derivabile F la cui derivata coincida con f (ossia, la ricerca delle primitive è il procedimento "inverso" della derivazione).
Ci poniamo le seguenti domande:

1. data una funzione f esiste sempre una sua primitiva in I?
2. se una primitiva esiste, è unica?
3. come trovarla?

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale (vedi Arg. 9) risponde alla prima di queste domande implicando che vale la seguente:

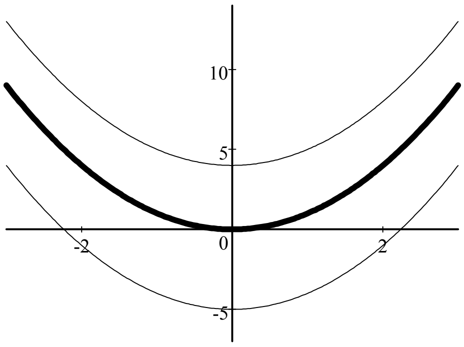
Proposizione 8.3 *Ogni funzione continua in un intervallo I ammette una primitiva in I.*

Quindi almeno per le funzioni *continue* siamo certi dell'esistenza di una primitiva.
In realtà, non solo di una. Infatti osserviamo che le funzioni $F(x) = \sin x$; $G(x) = \sin x + 2003$; $H(x) = \sin x - \pi$; ... sono tutte primitive di $f(x) = \cos x$.
In generale, vale:

Proposizione 8.4 *Se una funzione f ammette una primitiva F in un intervallo I, allora:*
i) ogni funzione della forma $F + c$ è anch'essa una primitiva di f, comunque si scelga la costante reale c;
ii) ogni altra primitiva G di f in I ha la forma $G = F + c$ per un'opportuna costante reale c.

In altre parole, se la funzione f ammette una primitiva F in I, ne ammette infinite che sono esattamente tutte quelle che si ottengono aggiungendo alla funzione F una qualunque costante[1]. Cioè, il grafico di ognuna di esse si ottiene da quello di F per mezzo di una traslazione verticale. Ad esempio, nella prossima figura sono evidenziati i grafici delle funzioni $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2 + 4$, $H(x) = x^2 - 5$; queste tre funzioni sono primitive, in $\mathbb{R}$, della stessa $f(x) = 2x$.

[1]Questo è una conseguenza del Teorema di Lagrange (vedi Arg. 6).



Definizione 8.5 Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, l'insieme delle sue primitive si chiama **integrale indefinito** di f e si indica con il simbolo $\displaystyle\int f(x)\, dx$.
Quindi,

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \{F : I \to \mathbb{R} \text{ derivabili in } I \text{ e tali che } F'(x) = f(x) \text{ per ogni } x \in I\}.}$$

La Proposizione 8.4 può essere riformulata dicendo che:

Se F è una primitiva di una data funzione f, allora

$$\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + c, \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}.}$$

Nel seguito, con la lettera c indicheremo un'arbitraria costante reale.

Esempio 8.6 Derivando i termini a secondo membro possiamo verificare che:

- $\displaystyle\int \cos x\, dx \ = \ \sin x + c.$
- $\displaystyle\int 2x\, dx \ = \ x^2 + c.$
- $\displaystyle\int e^x\, dx \ = e^x + c.$

• Nell'intervallo $I_1 = (0, +\infty)$ una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $\log x$; invece nell'intervallo $I_2 = (-\infty, 0)$ una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è la funzione $\log(-x)$. Per brevità si usa scrivere

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c,$$

e questa formula vale in ogni intervallo che <u>non</u> contiene $x = 0$.

Il calcolo esplicito delle primitive può, in generale, rappresentare un problema non banale.
Certamente conosciamo le primitive di molte funzioni elementari, utilizzando la tabella delle loro derivate (vedere Arg. 6).

8.2 Tabella delle primitive "immediate"

$\int 1 \; dx = x + c$	(1)
$\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1$	(2)
$\int \dfrac{1}{x} \; dx = \log\|x\| + c$	(3)
$\int e^x dx = e^x + c$	(4)
$\int a^x \; dx = \dfrac{a^x}{\log a} + c, \quad a > 0, \; a \neq 1$	(5)
$\int \cos x \; dx = \sin x + c$	(6)
$\int \sin x \; dx = -\cos x + c$	(7)
$\int \dfrac{1}{1+x^2} \; dx = \arctan x + c$	(8)

Esempio 8.7 Utilizzando la formula (2) ricaviamo:

- $\int x^3 \, dx \; = \; \dfrac{x^4}{4} + c;$
- $\int \sqrt{x} \, dx \; = \; \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} \, x^{1+\frac{1}{2}} + c \; = \; \dfrac{2}{3} \, x^{\frac{3}{2}} + c;$
- $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} \, dx \; = \; \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} \, x^{1-\frac{1}{2}} + c \; = \; 2 \, x^{\frac{1}{2}} + c \; = \; 2\sqrt{x} + c;$
- $\int \sqrt[3]{x} \, dx \; = \; \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}} \, x^{1+\frac{1}{3}} + c \; = \; \dfrac{3}{4} \, x^{\frac{4}{3}} + c$

Mentre con la formula (5) otteniamo:

- $\int 2^x \, dx \; = \; \dfrac{2^x}{\log 2} + c.$

Osservazione. Notiamo che:

- $\displaystyle\int \cos(x+5)\; dx \;= \sin(x+5) + c$
- $\displaystyle\int e^{3x}\, dx \;= \frac{1}{3}e^{3x} + c.$

Dagli esempi precedenti possiamo dedurre che: se F è una primitiva della funzione f e a e b sono due numeri reali, con $a \neq 0$, si ha

$$\int f(ax+b)\; dx \;= \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Questa formula è un caso particolare del metodo di integrazione per sostituzione.

Proprietà dell'integrale indefinito

Per determinare le primitive di funzioni che si ottengono sommando tra loro le funzioni elementari, e/o moltiplicandole per una costante, è utile la seguente

Proposizione 8.8 *Siano f e g continue in un intervallo I, allora*

1) $\displaystyle\int af(x)dx = a\int f(x)\; dx$, *per ogni* $a \in \mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]\; dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

Esempio 8.9 Determiniamo l'integrale indefinito di:

- $f(x) = 3\cos x + \dfrac{5}{\sqrt{x}}$;

$$\int \left(3\cos x + \frac{5}{\sqrt{x}}\right)\; dx \;=\; 3\int \cos x\, dx \;+ 5\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \; 3\sin x + 10\sqrt{x} + c.$$

- $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x - \dfrac{1}{3}e^x$;

$$\int \left(\frac{4}{x} + 2x - \frac{1}{3}e^x\right)\; dx \;= 4\int \frac{1}{x}\, dx + 2\int x\, dx - \frac{1}{3}\int e^x\, dx \;=\; 4\log|x| + x^2 - \frac{1}{3}e^x + c.$$

- $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x}+2}{x^3}$;

$$\int \left(\frac{x^2\sqrt{x}+2}{x^3}\right)\; dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\; dx + 2\int x^{-3}\; dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + c.$$

- $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{x}$;

$$\int \frac{(x+2)^3}{x}\; dx = \int x^2\; dx + 6\int x\; dx + 12\int dx + 8\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x + 8\log|x| + c.$$

- $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

$$\int \frac{x}{x-1}\; dx = \int \frac{x-1+1}{x-1}\; dx = \int dx + \int \frac{1}{x-1}\; dx = x + \log|x-1| + c.$$