TC

1/12/2015

$\mathcal{O}(X)^{op}$ 11

Set

$\Omega \in \mathrm{Set}^{\mathcal{O}(X)^{op}}$

$\Omega(U) = \{$ crivelli su $U\}$

$\forall U \in \mathcal{O}(X)$

S crivello su U

scelta di

$S = \{ V \mid V \subseteq U\}$ t.c.

$W \subseteq \underset{\underset{S}{\wedge}}{V} \subseteq U \implies W \in S$

S = <u>downward closed</u> subset di $\mathcal{O}(U)$ ↗ aperti di X contenuti in U

Set ← TOPOS

<u>Ab</u> ← CAT. ABELIANA

<u>Ab</u> ha un oggetto classificatore di sottoggetti? Supp $\exists$ tale

$\sigma : \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{1} \longrightarrow \Omega$

l'unica freccia $0 \longrightarrow 0$

$\forall$ sottogruppo $S \hookrightarrow A$ $\exists!\, \chi_S$ t.c.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "\chi_S"] \arrow[dr, two heads] & \Omega \\
& A/S \arrow[u, tail]
\end{tikzcd}$$

$S = \chi_S^{-1}(0)$

kernel di χ_S

in particolare $S = 0$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\chi_0"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \Omega \\
A/0 \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

quindi Ω dovrebbe contenere ~~tutti~~ ogni altro gruppo : ASSURDO

$A = \Omega \oplus \Omega$ $\qquad \Omega \oplus \Omega \rightarrowtail \Omega$

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 0 \arrow[d] \\
\Omega \oplus \Omega \arrow[r, "a_1"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{E}$ = TOPOS ELEMENTARE

1. $\mathcal{E}$ <u>LEX</u> ha limiti finiti
2. $\mathcal{E}$ CARTESIANA CHIUSA
3. $\mathcal{E}$ ha class. di SOTTOOGGETTI

<u>EX</u> $\mathcal{L} \overset{}{\underset{J}{\hookrightarrow}} \mathcal{E}$ $\quad \mathcal{E}$ cat con limiti finiti

$\mathcal{L}$ sottocategoria piena J inclusione

$\mathcal{L}$ è riflessiva $\Longleftrightarrow$ $R \dashv J$

Allora $\mathcal{L}$ è chiusa per limiti (finiti) cioè, se $(L_i)_{i \in I}$ è un diagramma in $\mathcal{L}$ e

$L = \lim (L_i)_{i \in I}$ è un suo limite in $\mathcal{E}$ $\Rightarrow$ $L \in \mathcal{L}$

e $L = \lim (L_i)_{i \in I}$ è limite in $\mathcal{L}$

<u>Df</u> $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{E}$ (con $\mathcal{E}$ lex)

è una localizzazione di $\mathcal{E}$ se è una sottocategoria riflessiva $R \dashv J$ con R che preserva limiti finiti

<u>EX</u> 1) $\mathcal{E}$ cartesiana chiusa
$\Rightarrow \mathcal{L}$ è cartesiana chiusa

2) se $\mathcal{E}$ ha class. di sottoggetti
$\Rightarrow \mathcal{L}$ " "

$\mathcal{E}$ topos $\Rightarrow \mathcal{L}$ è un topos

<u>EX</u> TOPOS : Set, Setfin

$Set^{C^{op}}$ $Setfin^{C^{op}}$

LOCALIZZAZIONI di $Set^{C^{op}}$?

COMINCIAMO con $Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$

$$F(U) = \begin{cases} D(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R}\} & \text{sì} \\ C(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ cont}\} & \text{sì} \\ B(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ limitate}\} & \text{no} \\ K(U,\mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ cost}\} & \text{no} \end{cases}$$

sono tutti in $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{op}}$

Df $F \in \mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{op}}$ è un fascio

$\iff \forall\, U$ aperto di X $\quad V \subseteq U_i \in \mathcal{U} \Rightarrow V \in \mathcal{U}$

$\forall$ ricoprimento aperto saturato $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di U

$\bigcup_{i \in I} U_i = U$, data una famiglia

$(s_i \in F(U_i))_{i \in I}$ t.c.

$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \Rightarrow \exists!$

$s \in F(U)$ t.c. $s|_{U_i} = s_i$

$$Sh(X) = \{ F \in Set^{\mathcal{O}(X)^{op}} \mid F \text{ fascio} \}$$

$$\begin{tikzcd} Sh(X) \arrow[r, hook, "J"] & Set^{\mathcal{O}(X)^{op}} \arrow[l, bend right, "R"'] \end{tikzcd}$$

è una localizzazione di $Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$

$\exists\ R \dashv J$ $\quad$ R preserva i limiti finiti

da $P \in Set^{\mathcal{O}(X)^{op}}$, si costruisce

$\Lambda P \left(= \coprod_{x \in X} P_x \right)$ spazio topologico

$$\begin{tikzcd} & \Lambda P \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

p omeo locale

$\forall\, p \in \Lambda P\ \exists\, V$ aperto $p \in V$

$p|_V : V \to p(V)$ homeo

$p(V)$ aperto

da qui costruisco un fascio su X

$\Gamma(\Lambda P)(U) = \{ s \mid p s = i \text{ cont} \}$

fascio associato

<u>covering sieve</u> su U è un crivello che ricopre U, cioè

$(U_i)_{i \in I}$ famiglia downward closed di sottoaperti di U

$$\bigcup_{i \in I} U_i = U$$

topologia

quindi

$\forall\ U \rightsquigarrow \mathcal{C}(U) =$ covering sieves su U

$U \in \mathcal{O}(X)$

$S \in \mathcal{C}(U) \iff S$ crivello su U che ricopre U

$\mathcal{C}$ small

<u>Df</u> Dare una topologia di Grothendieck su $\mathcal{C}$ vuol dire assegnare $\forall\ C \in \mathcal{C}$ una famiglia di crivelli $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathrm{Sieves}(C)$ ($S \in \mathcal{C}(C)$ si dirà covering di C).

tali che

1. max crivello $= H_{\mathcal{C}}(-, C) \in \mathcal{T}(C)$

2. cambio di base: se $S \in \mathcal{T}(C)$ e $g : D \longrightarrow C$, $g^*(S) \in \mathcal{T}(D)$ (nel caso di $\mathcal{O}(X)$, $(U_i)_{i \in I}$ copre U e $V \subseteq U$, $(U_i \cap V)_{i \in I}$ copre V)

3. Dato $S \in \mathcal{T}(C)$, se R è un crivello su C t.c. $\forall g : D \to C$ in S $g^*(R) \in \mathcal{T}(D) \Rightarrow R \in \mathcal{T}(C)$

(per $\mathcal{O}(X)$: se $(U_i)_i$ copre U e $(V_{ij})_j$ copre U_i $\forall i \Rightarrow (V_{ij})_{ij}$ copre U

$(\mathcal{C}, \mathcal{T})$ si chiama SITO (di Groth.)

$P \in \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ $\quad (\mathcal{C}, J_G)$ un sito

S un crivello su C $\quad (S \rightarrowtail H_C)$

<u>Df</u> Una matching family di elementi di P per S è data da una famiglia $(x_f)_{f \in S}$ con

$$x_f \in P(\mathrm{dom}\, f) \qquad P(D) \ni x_f$$

$$f : D \to C$$

t.c. $\forall g$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "fg \in S"'] & D \arrow[d, "f \in S"] & & x_f \in P(D) \arrow[d, "P(g)"] \\
& C & & x_{fg} \in P(E)
\end{tikzcd}$$

$$x_f \xmapsto{P(g)} x_{fg}$$

$$P(g)(x_f) = x_{fg}$$

Ex Dare una matching family di P per S equivale a dare

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "x"] \arrow[d, hook] & P \\ H_C \arrow[ur, dashed, "a"'] & \end{tikzcd}$$

una t.n. x

Df Data una m.f. $(x_f)_{f\in S}$ per S un'amalgama per $(x_f)_{f\in S}$ è un elto x di $P(C)$ t.c.

$\forall\ f \in S$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "f"'] & P(C) \ni x \arrow[d, "P(f)"] \\ C & P(D) \end{tikzcd}$$

$$P(f)(x) = x_f$$

equivale a $H_C \dashrightarrow P$

Df: $P \in Set^{\mathcal{C}^{op}}$ è un fascio per $(\mathcal{C}, \tau) \iff \forall S \in \tau(c)$ e ogni m.f. $(x_f)_{f \in S}$ di P su S, $\exists!$ l'amalgama x di (x_f)