3/11/15

TC

EPIMORFISMI REGOLARI

split epi $\Rightarrow$ reg epi $\Rightarrow$ epi
"
retrazione $\not\Leftarrow$ $\not\Leftarrow$

<u>Top</u> epi regolari $\overset{\text{epi}}{\neq}$: $f : X \twoheadrightarrow Y$
suriettive con Y dotato
della top generata risp a f

<u>EX</u> Dim che è del caso $f =$
$\mathrm{Coeq}(h, k)$ con $h, k : Z \rightrightarrows X$

<u>Grp</u> e in <u>Ab</u> regolari epi = epi =
morfismi suriettivi

$G : \underline{\mathrm{Mon}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Set}}$

G dimenticante su <u>Set</u>

$F \dashv G$ F : costruzione del
monoide libero

$X \in Set$

FX = monoide libero su Set

GFX = insieme delle sequenze finite (stringhe) di elementi di X compresa quella vuota $(\ )$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in GFX$$

GFX è dotato di moltiplicazione e concatenazione

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_m) =$$

$$(x_1 \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

$$(\ )(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \dots x_n)(\ ) =$$

$$(x_1, \dots, x_n)$$

ottengo un monoide FX

$$\begin{array}{ccc} X & & F(X) \\ & & (x_1, \dots, x_n) \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X' & & (f(x_1), \dots f(x_n)) \end{array}$$

$F(f)$ morfismo di monoidi

$F(X')$

$$\eta : \mathrm{Id}_{\underline{Set}} \xrightarrow{\cdot} GF$$

$$\begin{aligned} \eta_X : X &\longrightarrow GFX \\ x &\longmapsto (x) \end{aligned}$$

questa ha la pr. univ. di una unità $F \dashv G$ (EX)

counità: $FG \xrightarrow{\cdot} \mathrm{Id}_{\underline{Mon}}$

$\forall$ Y monoide

$$\begin{aligned} \varepsilon_Y : FGY &\longrightarrow Y \\ (y) &\longmapsto y \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto y_1 \cdots y_n \\ () &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} (y_1, y_2)\,(y_3) & & (y_1 y_2) \cdot y_3 \\ \parallel & & \parallel \\ (y_1, y_2, y_3) & \longmapsto & y_1 y_2 y_3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} T := GF : \underline{Set} &\longrightarrow \underline{Set} \\ X &\quad\quad TX = GFX \end{aligned}$$

$\eta : \mathrm{Id}_{\underline{Set}} \xrightarrow{\cdot} T$ unità

$$\varepsilon_{FX} : FGFX \longrightarrow FX$$

$$G(\varepsilon_{FX}) : \overset{T^2X}{\overbrace{\underbrace{GF}\,\underbrace{GF}X}} \longrightarrow \overset{TX}{\overbrace{\underbrace{GF}X}}$$

$$\mu_X \qquad ((x_1, x_2), (x_3)) \longmapsto (x_1, x_2, x_3)$$

dà luogo ~~da~~ $\mu : T^2 \longrightarrow T$

~~...~~ $\mu = G\varepsilon F$ è una t.n.

(T, η, μ) dà luogo a una monade (su $\underline{Set}$) $T : \underline{Set} \to \underline{Set}$

si provano che valgono:

<u>AX 1</u>

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

$$T : \underline{Set} \longrightarrow \underline{Set}$$

$$\begin{array}{ccc}
X & & TX \\
\downarrow f & & \downarrow \\
X' & & TX'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(x_1 \dots x_n) \\
\downarrow \\
f(x_1) \dots f(x_n)
\end{array}$$

cioè $\forall X \in \underline{\mathrm{Set}}$

$$
\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, "\eta_{TX}"] & T^2X & TX \arrow[l, "T(\eta_X)"'] \\
& ((x_1),(x_2)) = (\eta_X(x_1), \eta_X(x_2)) & (x_1, x_2) \arrow[l, mapsto] \\
(x_1, x_2) \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, equal] & ((x_1, x_2)) \arrow[d, "\mu"] & \\
& (x_1, x_2) \arrow[uur, equal] &
\end{tikzcd}
$$

2 AX

$$
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu\circ"] \arrow[d, "\mu_T\circ"'] \arrow[dr, phantom, "="] & T^2 \arrow[d, "\circ\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\circ"', "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
$$

6

$$\begin{tikzcd}
T^3 X \ni \big(((x),(y)),((z))\big) \arrow[r, "T(\mu)"] \arrow[d, "\mu_{TX}"'] & \big(\mu_X((x)(y)),\mu_X((z))\big) = \big((x,y),(z)\big) \arrow[d, "\mu"] \\
\big((x),(y),(z)\big) \arrow[r, "\mu"'] & (x,y,z)
\end{tikzcd}$$

Df Una monade su $\mathbb{C}$ è data da (T,η,μ) dove

$T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\eta : Id_{\mathbb{C}} \overset{\cdot}{\longrightarrow} T$

$\mu : T^2 \longrightarrow T$

con AX 1 e 2

<u>Df</u> Un'algebra per T su $\mathcal{C}$ è una coppia (X, ξ) $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$

$\xi : TX \longrightarrow X$ in $\mathcal{C}$ detto morfismo strutturale t.c. siano verificati gli axiomi

(1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, equal] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Nel caso dei monoidi

$$\xi : TX = GFX \longrightarrow X$$
$$(x, y) \longmapsto \xi(x, y) =: x \cdot y$$
$$(\ ) \longmapsto \xi(\ ) =: 1$$
$$(x) \longrightarrow \xi((x)) = x$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & (x) \arrow[d, "\xi"] \\ & x \end{tikzcd}$$

AX 2

$$
\begin{tikzcd}
T^2X \arrow[r, "T(\xi)"] \arrow[d, "\mu_X"'] \arrow[dr, phantom, "="] & TX \arrow[d, "\xi"] \\
TX \arrow[r, "\xi"'] & X
\end{tikzcd}
$$

nel caso di monoidi

$$
\begin{tikzcd}
((a),(b,c)) \arrow[rr] \arrow[dd, bend right, "\mu"'] & & (a, b\cdot c) \arrow[ddl, bend left] \\
((a,b),(c)) \arrow[r, "T(\xi)"] \arrow[d, "\mu"] & (\xi(a,b), \xi(c)) = (a\cdot b, c) \arrow[d, "\xi"] & \\
(a,b,c) \arrow[r, leftrightarrow] & \xi(a,b,c) = (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c) &
\end{tikzcd}
$$

$\Rightarrow$ $a\cdot b = \xi(a,b)$ definisce un prodotto associativo

$$
\begin{tikzcd}
\begin{matrix} ((\bullet),(a)) \\ \big((a),(\,)\big) \end{matrix} \arrow[r, "T(\xi)"] \arrow[d, "\mu"'] & \big(\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{\xi(a)}, \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\xi(\,)}\big) \arrow[d, "\xi"] \\
(a) \arrow[r, "\xi"'] & \underset{\overset{\shortparallel}{a}}{\xi(a)} = a \cdot 1
\end{tikzcd}
$$

$(X, \cdot)$ è un monoide

Df Un morfismo tra 2 T-algebre (~~a~~ algebre per la monade T) $f : (X, \xi) \longrightarrow (X', \xi')$ è un morfismo $f : X \longrightarrow X'$ t.c.

$$
\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\xi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & TX' \arrow[d, "\xi'"] \\
X \arrow[r, "f"'] & X'
\end{tikzcd}
$$

per i morfismi:

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r] \arrow[d] & (f(a), f(b)) \arrow[d] \\
a \cdot b \arrow[r, "f"] & f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)
\end{tikzcd}$$

dà luogo a un morfismo di monoidi

composizione è la stessa che in $\mathbb{C}$

così abbiamo costruito una categoria $\mathbb{C}^T = Alg_T(\mathbb{C})$

delle T-algebre

(TX, μ_X) $\quad \mu_X : T(TX) \longrightarrow TX$

è una T-algebra $\quad \forall X \in ob(\mathbb{C})$

(algebra libera)

1)
$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, "\eta_{TX}"] \arrow[dr, equal] & T^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\
& TX
\end{tikzcd}$$

I parte dell'AX 1 per T monade

2)
$$\begin{tikzcd} T^3X \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{TX}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & T^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\ T^2X \arrow[r, "\mu_X"'] & TX \end{tikzcd}$$

Ax 2 per T monade

<u>Non solo</u>!

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "T(\xi)"] \arrow[d, "\mu_X"'] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ TX \arrow[r, "\xi"'] & X \end{tikzcd}$$

Ax 2 per (X, ξ) alg.

$$\xi : (TX, \mu_X) \longrightarrow \cancel{TX} \, (X, \xi)$$

è un morfismo di algebre

<u>EX</u> 1) Cos'è una monade su $\underline{X}$, per X preordine?

2) $Ab \underset{F}{\overset{J}{\rightleftarrows}} Grp \qquad F \dashv J$

(i) mostrare che $JF : Grp \to Grp$ è una monade su $\underline{Grp}$

(ii) trovare le algebre per questa monade

3) $U : \underline{Poset} \longrightarrow \underline{Set}$

insiemi parz. ordinati e funzioni monotone

(i) mostrare che U è aggiunto dx

$\exists\, F \dashv U$

(ii) mostrare che $UF : \underline{Set} \to \underline{Set}$ monade su Set

(iii) trovare le algebre per UF

4) $\mathbb{P} : \underline{Set} \longrightarrow \underline{Set}$

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \mathbb{P}(X) & \ni & A \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{P}(f)} & & \downarrow \\ Y & & \mathbb{P}(Y) & \ni & f(A) \end{array}$$

$$\eta_X : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ x & \longmapsto & \{x\} \end{array}$$

è t.n.

$$\mu_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ \alpha & \longmapsto & \cup\alpha \end{array}$$

μ è t.n.

(i) mostrare che abbiamo una monade

(ii) trovare le sue algebre.