4/12/15

TC

<u>Df</u> Un topos di Grothendieck è una categoria equivalente a $Sh(\mathcal{C}, J)$ $(\mathcal{C}, J)$ sito

$$Sh(\mathcal{C}, J) \longleftrightarrow Set^{\mathcal{C}^{op}}$$

sottocategoria dei fasci PIENA

si dimostra essere una localizzazione del topos $Set^{\mathcal{C}^{op}}$

$\Rightarrow$ $Sh(\mathcal{C}, J)$ è un topos (sottotopos di $Set^{\mathcal{C}^{op}}$)

$$\text{topos di Gr.} \Rightarrow \text{topos (elementare)}$$
$$\not\Leftarrow$$
$$Set_{fin}$$

hanno coprodotti infiniti

no

<u>TH GIRAUD</u> : CARATTERIZZAZIONE TOPOS di GROTH.

ESEMPI

1. $\mathcal{C}$ piccola

$\forall\, C \in \mathcal{C}$ $\quad \tilde{\mathcal{J}}(C) = \{ H_C \}$

è una topologia (la + piccola)

$\mathcal{P} \in Set^{\mathcal{C}^{op}}$ è un fascio per $\tilde{\mathcal{J}}$

se $\forall\, C \quad \forall\, S \in \tilde{\mathcal{J}}(C)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\forall x"] \arrow[d] & P \\ H_C \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{x}"'] & \end{tikzcd}$$

se $S = H_C$ ogni prefascio è un fascio per questa topologia (banale)

quindi $Set^{\mathcal{C}^{op}} = Sh(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{J}})$ è un topos di [illegible].

2. $\mathcal{C}$ ~~[illegible]~~ small

$S \in \tilde{\mathcal{J}}(C) \iff S \rightarrowtail H_C$ è un qualunque crivello su C

è banale [illegible]
[illegible] topologie

$$\mathrm{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$$

$$\begin{tikzcd}
\emptyset : \mathbb{C}^{op} \arrow[r] & \mathrm{Set} \\
c & \emptyset \\
c' \arrow[u] & \emptyset \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

$\forall P \in \mathrm{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$

$\forall c$

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d, equal] & P(c) \arrow[d, "P(f)"] \\
\emptyset \arrow[r] & P(c')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\cdot"'] & P \\
H_c \arrow[ur, "\exists!\,\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

P fascio per la top totale

t.u. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}^{\mathbb{C}^{op}}}(H_c, P) = \{*\}$

$\Vert S$ Y

$P(c)$

$\Rightarrow$ P è costante

3. $\mathcal{T}$ [illegible]

$S \in \mathcal{T}(C)$ [illegible] $S \neq \emptyset$ [illegible]

1. OK

2. $S \in \mathcal{T}(C) \quad \exists f \in S \quad f : C' \to C$

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\bar{g}} & C' \\ \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{g} & C \end{array} \qquad g\bar{f} \in S \qquad f\bar{g}$$

$$g^*(S) \neq \emptyset \Rightarrow g^*(S) \in \mathcal{T}(D)$$

$$\Rightarrow \bar{f} \in g^*(S) \neq \emptyset$$

3. <u>FINIRE PER EX</u>

<u>TOPOLOGIA ATOMICA</u>

COSA SUCCEDE PER $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$?

$\mathbb{C}^{op}$ $\qquad$ CATEG. ABELIANE $\qquad$ $\mathrm{Set}^{\mathbb{C}^{op}}$ $\qquad$ TOPOS $\mathbb{C}$

$\underline{Ab}$ $\longleftrightarrow$ $Sh_{Ab}(\mathbb{C}, \mathcal{J})$ $\qquad$ $\supset Sh(\mathbb{C}, \mathcal{J})$ TOPOS

$\underline{(\mathbb{C}, \mathcal{J})}$

$P \in Sh_{Ab}(\mathbb{C}, \mathcal{J}) \iff$

$P : \mathbb{C}^{op} \longrightarrow Ab \xrightarrow{U} Set$

P è un fascio per $(\mathbb{C}, \mathcal{J})$

ABELIANE $\qquad$ TOPOS

$\subset$ $\qquad$ $\supset$

$\cup$

(SARD) ESATTA

Df Una categoria $\mathbb{C}$ è (Barr) esatta se

- LEX (LIM FINITI)
- REGOLARE
- OGNI REL DI EQUIVALENZA È EFFETTIVA.

RELAZIONI su $\mathbb{C}$ LEX

R tra $X, Y \in \mathrm{ob}\, \mathbb{C}$

$$R \underset{\text{mono}}{\overset{r}{\rightarrowtail}} X \times Y \underset{\pi_Y}{\overset{\pi_X}{\rightrightarrows}} \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$$

$\pi_X \cdot r = r_0$

$\pi_Y \cdot r = r_1$

$$R \xrightarrow{r = \langle r_0, r_1 \rangle} X \times Y$$

$X = Y$ R rel su X

$$R \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} X \qquad \langle r_0, r_1 \rangle \text{ mono}$$

- RIFLESSIVA

R è riflessiva $\Leftrightarrow \exists\ \delta : X \to R \ \mid$

$$X \xrightarrow{\delta} R \rightrightarrows X$$

$$r_0 \circ \delta = r_1 \circ \delta = 1_X$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "\Delta_X"'] & R \arrow[d, "\langle r_0, r_1 \rangle"] \\
& X \times X
\end{tikzcd}$$

- SIMMETRICA $\Leftrightarrow \exists$

$$\begin{tikzcd}
\sigma : R \arrow[r] \arrow[dr, "\langle r_1, r_0 \rangle"'] & R \arrow[d, "\langle r_0, r_1 \rangle"] \arrow[dl, phantom, "="] \\
& X \times X
\end{tikzcd}$$

- TRANSITIVA

$$xRy \ \wedge \ yRz \Rightarrow xRz$$

xRy & tRz

$y = t$

$\sim$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \tilde{R} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll, bend right, "p_0"'] \arrow[ddrr, bend left, "p_2"] & & \\
 & R \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[dr, "r_1"] & & R \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[dr] & \\
X & & X & & X
\end{tikzcd}
$$

p_2 ecc x, y, z

$x R y R z$

$\exists\, \tau$

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{R} \arrow[r, "\langle p_0, p_2 \rangle"] \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \times X \\
R \arrow[ur, "\langle r_0, r_1 \rangle"'] &
\end{tikzcd}
$$

$r_0 \tau = p_0$

$r_1 \tau = p_2$

<u>Df</u> R è di equiv se rifl, simm e trans.

$R \overset{r_0}{\underset{r_1}{\rightrightarrows}} X$ rel su X

$\forall\, T \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$, posso df una relazione R_T su $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ in <u>Set</u>

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "t"'] & X \\ R \arrow[ur, shift left, "r_0"] \arrow[ur, shift right, "r_1"'] & \end{tikzcd}$$

$f \, R_T \, g$

$\Updownarrow$

$\exists \, t$ t.c.

$r_0 t = f$

$r_1 t = g$

ex R_T è a) rifl $\forall \, T$

b) simm

c) trans

$\Longleftrightarrow$ R è a) b) c)

ESEMPI $\in$ Rel

- $X \xrightarrow[\Delta_X]{} X \times X$ DISCRETA
- $X \times X \xrightarrow[1]{} X \times X$ INDISCRETA

Kernel PAIR di una freccia

$$\begin{tikzcd} R[f] \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ S \arrow[u] \arrow[ur, shift left, "s_0"] \arrow[ur, shift right, "s_1"'] \end{tikzcd}$$

t.c.

· $f r_0 = f r_1$

· & $f s_0 = f s_1 \Rightarrow \exists! s$

$S \longrightarrow R[f]$ $\quad r_0 s = s_0$, $r_1 s = s_1$

si ottiene come

$$\begin{tikzcd} R[f] \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

pullback

è una rel. d'equiv.:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "1"] \arrow[dr, "\exists!"] \arrow[ddr, bend right, "1"'] & & \\ & R[f] \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

è rifl.!

FINIRE PER EX

kernel pair = rel d'equiv effettive

CI SONO REL EQUIV NON EFFETTIVE

$\mathcal{C} = Ab_{tf}$ abeliani liberi da torsione

$\mathbb{Z} \in ob\, \mathcal{C}$

$x R y \iff x - y =$ pari

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\overline{q}"'] & \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/R \arrow[d] \\ & & 0 \end{tikzcd}$$

in Ab

il quoziente di $\mathbb{Z}$ su R è $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[r, "\bar{v}_0"] \arrow[d, "\bar{v}_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\bar{q}"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\bar{q}"'] & 0 \end{tikzcd}$$

$\bar{q} = \mathrm{Coeq}(v_0, v_1)$

kernel pair di $\bar{q}$ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \neq R$

$R \neq R[\bar{q}]$

ex: Se esiste il coequalizzatore q di $R \overset{v_1}{\underset{v_0}{\rightrightarrows}} X$, allora R è effettiva $\Leftrightarrow$ $R = R[q]$

$\Rightarrow$ $R \overset{v_0}{\underset{v_1}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z}$ non è effettiva!

$\Longrightarrow$ Ab_{tf} NON è BARR esatta