11/12/15

TC

MARTEDI 15.30

Df $f : X \longrightarrow Y$ si dice EPI ESTREMALE se

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & Y \\
& Y' \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\forall$ $me = f$, m mono $\Rightarrow m$ iso

in **Set** epi extr = suriezioni

EX f iso $\Rightarrow$ epi extr

f extr epi + mono $\Rightarrow f$ iso

Df $f : X \longrightarrow Y$ si dice STRONG EPI (EPI FORTE) se $\forall$ diagr commutativo con m mono $\exists!$ d

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ Z \arrow[r, tail, "m"'] & T \end{tikzcd}$$

che rende commutativi i 2 triangoli

$\forall$ C STRONG $\Rightarrow$ EXTR

infatti

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & Y \\ & \cdot \arrow[u, tail, "m"'] \end{tikzcd}$$

f strong, m mono

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \cdot \arrow[r, tail, "m"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\exists!$ $md = 1$

siccome m è mono

$\cancel{m}\, d m = \cancel{1_m}\ 1$

$\Rightarrow$ m iso

$\mathcal{C}$ lex (con lim fin) 13

EXTR EPI $\Longleftrightarrow$ STRONG EPI

<u>DIM</u>

$\Longleftarrow$ SEMPRE

$\Longrightarrow$ f extr epi

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists"] \arrow[dd, "e"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \arrow[dl, bend left, "\bar{m}^{-1}"] \\
& P \arrow[ur, tail, "\bar{m}"] \arrow[dl, "\bar{g}"] & \\
Z \arrow[rr, tail, "m"'] & & T
\end{tikzcd}
$$

$\bar{m}$ è mono (pullback di mono)

$\exists!\, e$

$\bar{m}\, e = f \Rightarrow \bar{m}$ iso

$\exists\ \bar{m}^{-1}$ e $\bar{g}\,\bar{m}^{-1}$ dà la diagonale richiesta (unica x m mono)

$$\Delta_2\, d = \langle h, k\rangle$$
$$\Updownarrow$$
$$\overbrace{\pi_0\, \Delta_2}^{1}\, d = \pi_0 \langle h, k\rangle = h$$
$$\|$$
$$\overbrace{\pi_1\, \Delta_2}^{1}\, d = \pi_1 \langle h, k\rangle = k$$

$\Rightarrow h = k \Rightarrow f$ epi $\square$

<u>EX</u> regular epi $\Rightarrow$ strong epi

SPLIT EPI (EX)

$\Downarrow$

REGULAR EPI

$\Downarrow$

STRONG EPI $\Leftarrow$ EPI ($\mathcal{C}$ con pullbacks)

$\Downarrow$

EXTR EPI

<u>DUAL NOTIONS</u> $\Downarrow$ $\mathcal{C}$ lex

EPI

$\mathbb{C}$ lex

ext epi ($\Leftarrow$ STRONG) $\Longrightarrow$

EPI

<u>Dim</u>

---

f extr epi $\Leftarrow$ STRONG

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "k"] \arrow[dr, "{\langle h,k\rangle}"] & \\
& Z & Z \times Z \arrow[l, shift right, "\pi_0"'] \arrow[l, shift left, "\pi_1"]
\end{tikzcd}
$$

$$hf = kf$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "kf=hf"'] & Y \arrow[d, "{\langle h,k\rangle}"] \arrow[dl, "\exists!\, d"'] \\
Z \arrow[r, tail, "\Delta_Z"'] & Z \times Z
\end{tikzcd}
$$

$\Delta_Z = \langle 1,1\rangle$

$\langle h,k\rangle f = \Delta_Z hf$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \pi_0 \langle h,k\rangle f = \pi_0 \Delta_Z hf \\ \pi_1 \langle h,k\rangle f = \pi_1 \Delta_Z kf \end{cases}$$

$\mathcal{C}$ lex (EX)

- $\xrightarrow{f} \xrightarrow{g}$ 1) f e g extr epi
  $\Rightarrow gf$ " "
  2) gf è extr epi
  $\Rightarrow g$ " "

Df $\mathcal{C}$ lex

$\mathcal{C}$ ha una fattorizzazione (epi extr, mono) se ogni f può essere fattorizzata

$f = me$ e epi extr, m mono

Ogni ~~tale~~ fattorizzazione è unica a meno di iso

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddr, bend right, "e'"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "m"] \arrow[d, dashed, "\exists! d"] & \\ & Z' \arrow[uur, bend right, "m'"'] & \end{tikzcd}$$

$\exists!\, d$

e è strong

$de = e'$ extr

$\Rightarrow d$ extr

$m'd = m$ mono

$\Rightarrow d$ mono

$\Rightarrow d$ iso

quindi ~~le fatt.~~ Z, Z'

indici si dicono lo stesso

sottoggetto di Y ←

Data f, posso allora

def $f(X)$ come quel sott

immagine di X su f

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr, "!"] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & f(A) \arrow[d, hook] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

$A \in Sub(X)$: fatt fi

$f(A) \in Sub(Y)$

$$
\begin{aligned}
\exists_f : Sub(X) &\longrightarrow Sub(Y) \\
A &\longmapsto f(A) = \exists_f(A)
\end{aligned}
$$

$\exists_f$ è monotona

$\exists_f$ è un funtore immagine diretta

$$
\begin{aligned}
f^{-1} : Sub(Y) &\longrightarrow Sub(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
f^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

f^{-1} è un funtore immagine inversa

$$\exists_f \dashv f^{-1} \dashv (\forall_f) \qquad (\text{Ex})$$

$$\frac{\exists_f A \leq B}{A \leq f^{-1}(B)} \qquad \Updownarrow$$

<u>**EV**</u> <u>**Top**</u>

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & (f(X), \tau_f) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

extr epi

← cont mono

con top quoziente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\text{epi}"'] & & Y \\ & (f(X), \tau_i) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

← extr mono

con top sottospazio

<u>Df</u> (I) $\mathbb{C}$ è una cat regolare se

① $\mathbb{C}$ LEX

② $\mathbb{C}$ ha (epi: extr, mono) fatt di morfismi

③ extr epi sono stabili x pull back

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r, "f"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

f ext epi
$\Downarrow$
f' " "

$\mathbb{C}$ regolare $\Rightarrow$ regular epi $=$ extr epi

<u>LEMMA</u> (ex)

- m è mono $\Leftrightarrow$ $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \cdot \arrow[d, "m"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$ $\Rightarrow$ $h_0 = h_1$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "2"] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

e $1 \wedge 2$ sono pullback $\Rightarrow$ $1+2$ (i.e. rettangolo esterno) è pullback

---

<u>Dim</u> Sia $f : X \twoheadrightarrow Y$ epi

Kernel pair di f $R[f] \underset{r_1}{\overset{r_0}{\rightrightarrows}} X$

<u>TS</u> $f = \mathrm{Coeq}(r_0, r_1)$, cioè

$$\begin{tikzcd} R[f] \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, "h"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

·) $\forall$ $f r_0 = f r_1$

·) $\forall g$ $\exists!\, h$

$g r_0 = g r_1$ $\quad h f = g$

Fisso g

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[dl, "(\pi_Y i)^{-1}"] \\ X \arrow[urr, bend left, two heads, "f"] \arrow[rr, "\langle f, g \rangle"] \arrow[dr, "e"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & & Y \times Z \arrow[u, "\pi_Y"'] \arrow[d, "\pi_Z"] \\ & I \arrow[ur, "i"] & Z \end{tikzcd}$$

Se dimostro $\pi_Y i$ è iso, $(\pi_Y i)^{-1}$ pgT

$$e = (\pi_Y i)^{-1} \pi_Y i e = (\pi_Y i)^{-1} f$$

$$\underset{\underset{g}{\parallel}}{\pi_Z i e} = \underbrace{\pi_Z i (\pi_Y i)^{-1}}_{h} f$$

(unica perché f è epi)

NOTA $\overline{\pi_Y i}$ è epi estremale

$(\pi_Y i)e = f$ epi estr.

allora ci basta mostrare che $\overline{\pi_Y i}$ è mono, cioè: nel pb $h_0 = h_1$

$$
\begin{tikzcd}
R(q) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, "\varphi"] & {} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \tilde{X} \arrow[d, two heads, "e"] \\
{} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & Q \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "h_1"] & T \arrow[d, "\overline{\pi_Y i}"] \arrow[ddr, "i"] & \\
X \arrow[r, two heads, "e"'] & T \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\overline{\pi_Y i}"', "i"] & Y & \\
& & & Y\times Z \arrow[ul, "\pi_Y"'] \arrow[r, "\pi_Z"] & Z
\end{tikzcd}
$$

φ epi estr $\Rightarrow$ epi

$\underline{\text{TS}}$ $h_0\varphi = h_1\varphi \Rightarrow h_0 = h_1$

$\Uparrow$ i mono

$i h_0 \varphi = i h_1 \varphi$

$\Uparrow$

$$\begin{cases} \pi_Y\, i\, h_0\, \varphi = \pi_Y\, i\, h_1\, \varphi \\ \pi_Z\, i\, h_0\, \varphi = \pi_Z\, i\, h_1\, \varphi \end{cases} \quad \forall \text{ per cost.}$$

$$\pi_Z\, \underbrace{i\, e}_{\langle f,g\rangle}\, r_0 \qquad \pi_Z\, \underbrace{i\, e}_{\langle f,g\rangle}\, r_1$$

$$\underbrace{}_{g}\, r_0 = \underbrace{}_{g}\, r_1$$

$\Rightarrow h_0 = h_1 \Rightarrow \pi_Y i$ è mono

+ epi extr è iso

TEO (EQUIVALENZA della REGOLARITÀ BASATA SUI epi reg)

C è regolare $\iff$

① C è lex

②' kernel pair hanno coequalizzatori!

③' epi reg sono stabili x pullback.

Dim

① + ② + ③ (Def di reg)

$\Downarrow$

① + ②' + ③' $\leftarrow$ ovvio da ③ regular epi è extr epi

Dobbiamo dim solo ②'

Cioè che Data

$$\begin{tikzcd} R[f] \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & & \cdot \\ S \arrow[u, "h"] \arrow[ur, dashed, shift left, "s_0"] \arrow[ur, dashed, shift right, "s_1"'] & & \cdot \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

kernel pair di f data (e, m) fatt. di f $\Rightarrow$

$\underline{\text{TS}}$ $e = \mathrm{Coeq}(r_0, r_1)$

- $(R[f], r_0, r_1)$ è il kernel pair anche di e:

$e r_0 = e r_1$? $\underline{\text{Sì}}$

$\underbrace{m e}_{f} r_0 = \underbrace{m e}_{f} r_1$ e m mono

Se $S \underset{s_1}{\overset{s_0}{\rightrightarrows}} X$ t.c. $e s_0 = e s_1$

$\Rightarrow$ $\underbrace{m e}_{f} s_0 = \underbrace{m e}_{f} s_1$ $\Rightarrow \exists!\, h$

$r_0 h = r_1 h$

e epi reg $\Rightarrow e$ è il coeq del suo kernel pair che è $(R[e],(v_0,v_1))$

<u>VICE</u> ① + ②' + ③' $\rightarrow$

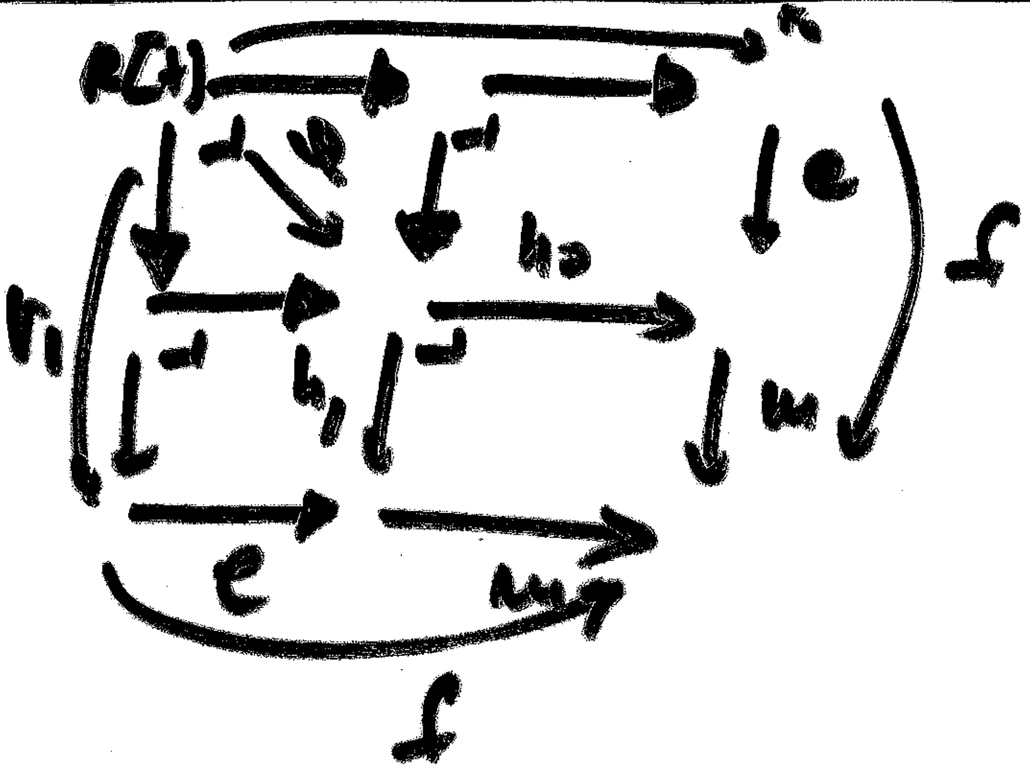
① + ② + ③ $\mathcal{C}$ è regolare

Vale ②, cioè data $f: X \to Y$ trovo la sua fatt così:

$$\begin{tikzcd} R[f] \arrow[r, shift left, "v_0"] \arrow[r, shift right, "v_1"'] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & Y \\ & & \cdot \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

$e = \operatorname{coeq}(v_0, v_1)$ $\exists\, m$ per la pr univ delle coeq

TS m è mono, cioè [illegible]



φ è epi (comp di epi reg è epi)

$h_0 \cancel{\varphi} = f r_0 = f r_1 = h_1 \cancel{\varphi}$

(3) EX

ext epi sono stabili.

basta dim che □

ext epi ⊂ reg epi