CT

13/10/05

RAPPRESENTAZIONE COME ELEMENTO UNIVERSALE

$F : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Set$ rappresentabile

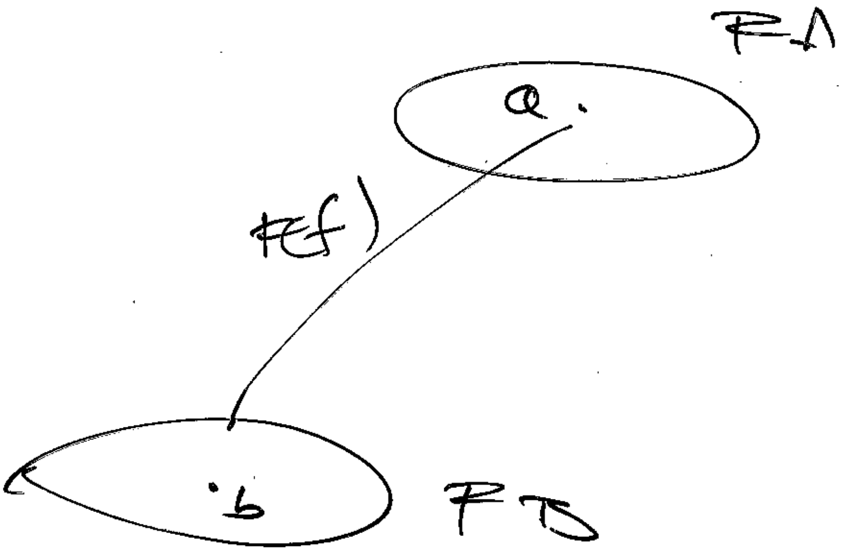
$\exists\, A \in ob\, \mathcal{A}$ e $\alpha : H_A \xrightarrow[\text{iso naturale}]{\cdot} F$

può essere descritta come una coppia (A, a) $A \in ob\, \mathcal{A}$ $a \in FA$

t.c. $\forall B \in ob(\mathcal{A})$ $\forall\, b \in F(B)$

$\exists !\, f : B \longrightarrow A$ $F(f) : FA \to FB$

$F(f)(a) = b$



Infatti se partiamo da $\alpha : H_A \xrightarrow[\cong]{\cdot} F$

$\exists !\, a \in F(a)$ $\alpha = \alpha^a$ per Yoneda

2

$\forall B \quad B \xrightarrow{f} A \qquad \alpha_B^a(f) = F(f)(a)$

$\alpha_B = \alpha_B^a : \mathrm{Hom}(B, A) \longrightarrow FB$ biezione

$\forall b \in FB \quad \exists!\, f \in \mathrm{Hom}(B,A) \quad \alpha_B^a(f) = b$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F(f)(a)$

$\mathrm{tn}(H_A, F) \xleftrightarrow{(1,1)} FA$

$\alpha^a \qquad\qquad\qquad\qquad a$

$a = a^{\alpha^a}$

Resta da dire (EX) che

$\alpha^a : H_A \overset{\cdot}{\longrightarrow} F$ è iso naturale

Proposizione duale $F : \mathcal{A} \to \mathrm{Set}$

Rappresentabile:

YONEDA EMBEDDING

$$Y : \mathcal{A} \longrightarrow [\mathcal{A}^{op}, Set] = Set^{\mathcal{A}^{op}}$$

$$\begin{array}{ccc}
A & \longmapsto & H_A : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Set \\
\downarrow h & & \downarrow \cdot\, Y(h) \\
A' & \longmapsto & H_{A'} : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Set
\end{array}$$

$$Y(h)_B : H_A(B) = \mathrm{Hom}(B, A) \longrightarrow H_{A'}(B) = \mathrm{Hom}(B, A')$$

$$f \longmapsto h \cdot f$$

$\Rightarrow Y$ è pieno e fedele

Dim.

$$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{A}^{op}, Set]}\big(Y(A), Y(A')\big) = Nat(H_A, H_{A'}) \underset{\text{Yoneda}}{\cong} H_{A'}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$$

$\Rightarrow Y$ è pieno e fedele

VERSIONE CONTROVARIANTE

$$Y : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Set^{\mathcal{A}} = [\mathcal{A}, Set]$$
$$A \longmapsto H^A$$

pieno e fedele

UNICITA' a meno di iso di rappresentazioni di funtori $F : \mathcal{A}^{op} \to Set$ rappresentabile

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\bullet", "\cong"'] \arrow[d, "\bullet", "\cong"'] & H_A \\ H_{A'} \end{tikzcd}$$

$F \cong Y(A) \cong Y(A')$

ma Y riflette iso (pieno e fedele)

$\Longrightarrow A \cong A'$ in $\mathcal{A}$!

VERSIONE DUALE (vale anche per funtori covarianti rappr.)

- $T = 1$

$\forall_X \; \exists! \; X \longrightarrow 1$

- Prodotto binario di $A, B \in ob(\mathcal{A})$ è $(A\times B, \pi_A, \pi_B)$ con $A \times B \in ob(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} & \forall U \arrow[d, dashed, "\exists! k"] \arrow[ddl, bend right, "\sigma_A"'] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_B"] & \\ & A\times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

t.c.

$\pi_A k = \sigma_A$

$\pi_B k = \sigma_B$

$k =: \langle \sigma_A, \sigma_B \rangle$

$f, g : \cancel{X} \longrightarrow A \times B$

$f = g \iff \begin{cases} \pi_A f = \pi_A g \\ \pi_B f = \pi_B g \end{cases}$

prodotto A e B è dato a meno di iso!

$I = 0$

Coprodotto binario (somma) A, B

$(A \amalg B, i_A, i_B)$

$A + B$

$$\begin{tikzcd} & U & \\ & A \amalg B \arrow[u, dashed, "\binom{\alpha_A}{\alpha_B}"'] & \\ A \arrow[ur] \arrow[uur, bend left, "\alpha_A"] & & B \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "\alpha_B"'] \end{tikzcd}$$

$\binom{\alpha_A}{\alpha_B} = [\alpha_A, \alpha_B]$

EX. Prodotti

COPRODOTTI (EX)

Set Prodotto cartesiano

Top Prodotto topologico (top sul prodotto cartesiano)

Grp Prodotto diretto (sul prodotto cartesiano)

Ab . . .

$(X, \leq)$ $\quad x, y \in X$

$$\begin{tikzcd}
 & v \arrow[d, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
x & & y
\end{tikzcd}$$

- $z \leq x, \; z \leq y$
- $\forall\, v \leq x, \; v \leq y$

$\Rightarrow v \leq z$

$\Rightarrow z = x \wedge y$

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet & \\
\bullet \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Prodotti su un insieme $\underline{I}$

$(X_i)_{i\in I}$ $\quad F : \underline{I} \longrightarrow \mathcal{C}$

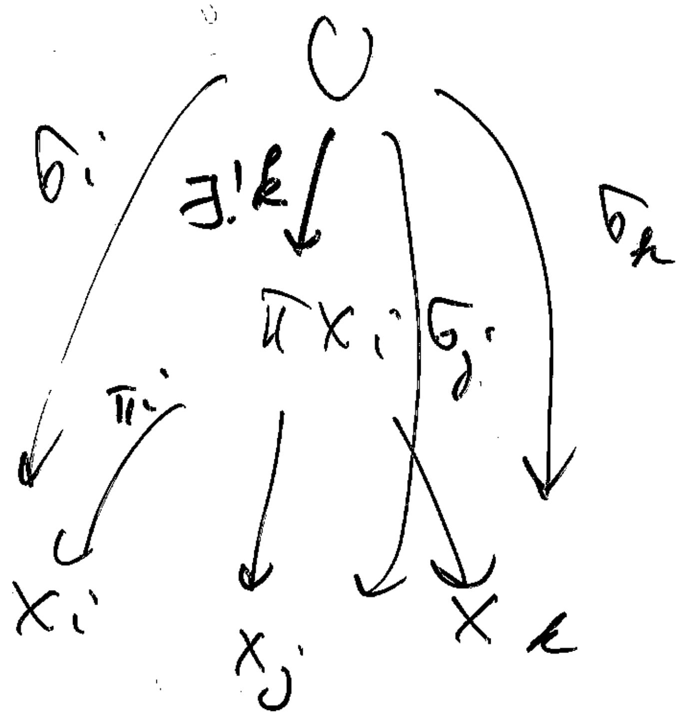
cat discreta ass a I

$X_i \in Ob(\mathcal{C})$

$\forall\, i \in I$

Allora prodotto di $(X_i)_{i\in I}$ è

dato $\left(\prod_{i\in I} X_i \,,\ \pi_i\right)$ $\quad \pi_i : \prod X_i \longrightarrow X_i$ $\quad \forall i\in I$ t.c.



$\exists!\, k$

$\pi_i k = \sigma_i \quad \forall_{i\in I}$

$I = \emptyset \qquad I = \{*\}$ ex

prodotto vuoto : oggetto terminale $\mathcal{C}$

Ex 1) $(F_i)_{i\in I}$ $\quad F_i \in Set$ $\quad \prod_{i\in I} F_i$? $\quad \coprod_{i\in I} F_i$?

2) $(x_i)_{i\in I}$ $\quad x_i \in (X, \leq)$

Equalizzatori

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \text{ in } \mathbf{C}$$

equalizzatore di f, g è dato da (K, k)

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\ H \arrow[u, "n"] \arrow[ur, "h"] & B \end{tikzcd}$$

t.c.

- $fk = gk$
- $fh = gh \Rightarrow \exists! n$ $kn = h$

Set posso scegliere

$K = \{x \in A \mid f(x) = f(y)\} \overset{i}{\hookrightarrow} A$

in **Grp**?

in **Top**?

in $(X, \leq)$?

Coequalizzatori

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[d, "q"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

Set $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$

rel di equiv su B in modo che $\forall x \in A$ $f(x) \sim g(x)$

$B/\sim$ Dimostrare che si tratta di un coequalizzatore

Diagramma $D: \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & D(i) \arrow[d, "Ds"] \\ j & D(j) \end{tikzcd}$$

categorie piccole

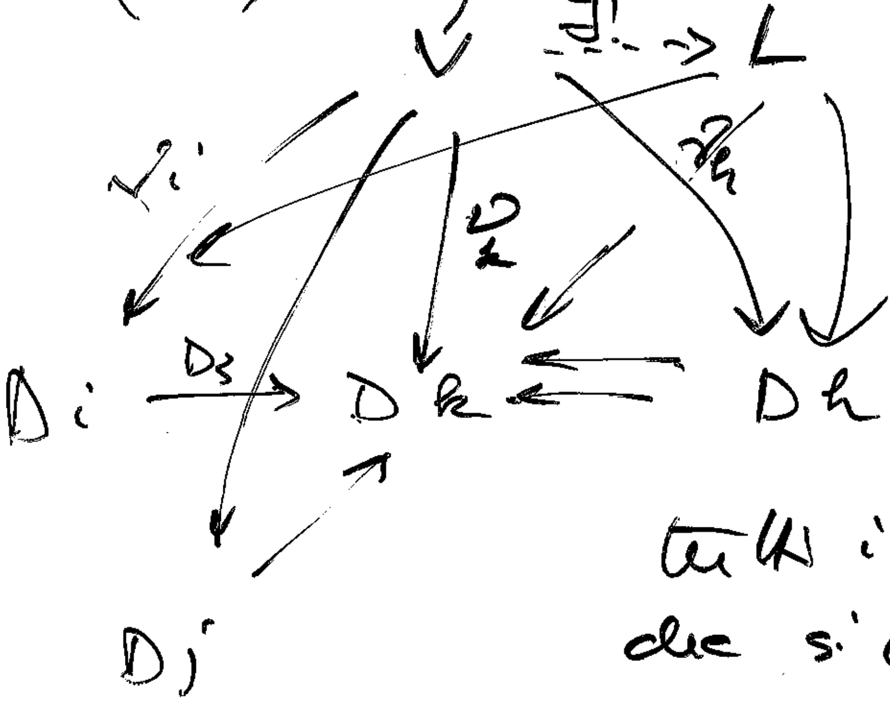
$$\left(\mathbb{I} : \underset{0}{\bullet} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \underset{1}{\bullet}\right) \xrightarrow{D} \mathbb{C}$$

$$\begin{tikzcd} & & V \arrow[dll] \arrow[dl] \\ A_0 \arrow[r, shift left, "Ds"] \arrow[r, shift right, "Dt"'] & A_1 & \end{tikzcd}$$

$A_0 = D(0)$, $A_1 = D(1)$

Un cono sopra D è dato

da (V, ν_i) $\quad \nu_i : V \longrightarrow D(i)$ $\forall i \in ob\,\mathbb{I}$



tutti i triangoli che si formano commutano

Formalmente un cono su D è

$\nu : \Delta_V \xrightarrow{\circ} D$ dove

$\Delta_V : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ di valore cost $\Delta_V(i) = V$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "s"] & V \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "="] & D_i \arrow[d, "Ds"] \\ k & V \arrow[r, "\gamma_k"'] & D_k \end{tikzcd}$$

Un limite su D è un cono su D terminale

Cocono su $D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ (11

sono $(M, \mu_i : D i \longrightarrow M)$ con

tutti i triangoli che si formano

commutativi

$\mu : D \longrightarrow \Delta_M : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$

costante di valore M

colimite su D è un cocono iniziale (tra i coconi su D)

Equalizzatori sono un limite di quale diagramma?