(1') + (2') + (3') 1

f epi extr
$\Rightarrow f$ epi regolare

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

epi extr

m mono $\Rightarrow m$ iso $\Rightarrow f$ è un coequalizz. $\Rightarrow f$ è epi regolare

per (3') stabile x pull back cioè vale (3) $\square$

$\mathcal{C}$ regolare

- (regular epi, mono) fattorizz
  $\|$
  extr epi
- regular epi sono chiusi x composizione
- regular epi sono stabili x pullback

- f, f' reg epi

$f \times f'$ è un reg epi. Infatti

$$\begin{tikzcd} X \times X' \arrow[rr, "f \times f'"] \arrow[dr, "f \times 1"'] & & Y \times Y' \\ & Y \times X' \arrow[ur, "1 \times f'"'] & \end{tikzcd}$$

basta dim che $f \times 1$ $(1 \times f')$ è epi reg (EX)

f è epi reg $\iff f = \mathrm{coeq}(R[f])$

$R[f]$ kernel pair

Df $\mathcal{C}$ è esatta se è regolare e ogni rel di equiv è effettiva

Reg epi $\xleftrightarrow{(1,1)}$ Rel di equiv.

ESEMPI di ESATTE

- TOPOS
- ABELIANE
- CATEGORIA MONADICA SU SET
  $U : \mathcal{C} \longrightarrow Set$ U monadico
- VARIETA' DELL'ALGEBRA UNIV.
  GRUPPI, ~~anelli~~, monoidi..

EX $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ riflessiva

come mostro reg ep

$\mathcal{A}$ regolare $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ regolare

$\mathcal{A}$ esatta $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$? PUÒ NON ESSERLO

$Ab_{tf} \hookrightarrow \underline{Ab}$ è riflessiva

$$A \longrightarrow A/T(A)$$

<u>Ab</u> esatta (VEDREMO)

Ab_{tf} regolare, ma non è esatta: $\exists$ R d'equiv. che non sono effettive

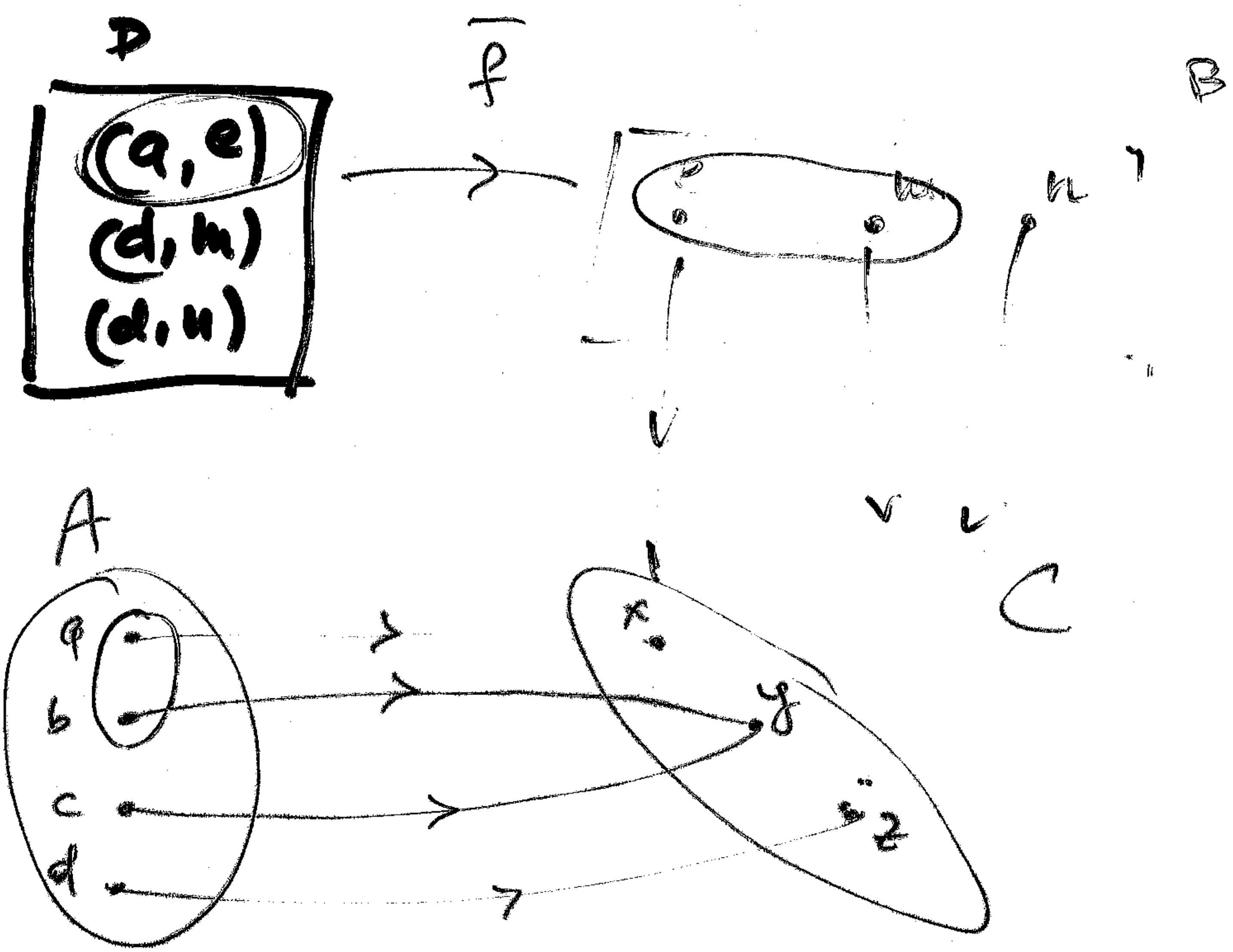
<u>TopGrp</u>: gruppi top regolare ma non esatta

<u>Top</u> non è NEPPURE regolare

regular epi = quozienti top

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & (f(X), \tau_f) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$U \in \tau_f \iff f^{-1}(U)$ è aperto



in A $\{a,b\}$ è l'unico ap non banale

C top indiscreta = top finale per f

f epi reg

in B = $\{e,m\}$ aperto

in $A \times B$ $\{a,b\} \times \{e,m\} = U$ aperto

$P \cap U = \{(a,e)\}$ aperto in P

$\shortparallel$

$\bar{f}^{-1}(\{e\})$

non è aperto in B

quindi $\bar{f}$ non è un regolare epi!

<u>**Df**</u> $\mathbb{C}$ è detto PREADDITIVA (<u>Ab</u>-category) se

- $\forall X, Y \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y) \in$ <u>Ab</u>
- $\forall X, Y, Z$

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \times \mathrm{Hom}(Y,Z) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}(X,Z)$$

lineare in ogni variabile, i.e.

$$T \xrightarrow{k} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$$

$$(f+g)k = fk + gk$$

$$h(f+g) = hf + hg$$

Si ha che

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "0_{XY}"] \arrow[rr, bend left] & Y \arrow[r, "f"] & Z \arrow[r, "0_{ZT}"] & T \end{tikzcd}$$

$$f\, 0_{XY} = 0_{XZ}$$

$$0_{ZT}\, f = 0_{YT}$$

<u>Ab</u> è PREADDITIVA

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \qquad X, Y \in \underline{Ab}$$

se uso la stessa def su <u>Grp</u>
non ho la stessa struttura!
ma non si ottiene addittività

$$G \times G \overset{p_0}{\underset{p_1}{\rightrightarrows}} G$$

$$(p_0+p_1)(x,y) = x+y$$

EX $p_0 + p_1$ è un morfismo
$\Leftrightarrow$ G è abeliano

EX PREADDITIVA con 1 oggetto

PROPOSIZIONE

$\mathcal{C}$ PREADD.

SONO EQUIVALENTI

(1) $\mathcal{C}$ ha ogg iniziale

(2) " " finale

(3) $\mathcal{C}$ ha ZERO OGGETTO

DIM

(3) $\Rightarrow$ (1) + (2)

(1) $\Rightarrow$ (3) Sia I iniziale

$Hom_{\mathcal{C}}(I, I) = \{1_I\} = \{0_{II}\}$

OSS se $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \underline{Ab}$
$\Rightarrow$ $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \neq \emptyset$

$\forall X \in \mathcal{C} \quad \mathrm{Hom}(X, I) \neq \emptyset$

Sia $f : X \longrightarrow I \longrightarrow I$

$1_I \cdot f = f$

$\underbrace{0_{II}\quad} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I) = \{0\}$

$\quad \|$

$0_{X,I} \longrightarrow I$ è finale

(1) $\Rightarrow$ (2) (duale)

$\mathcal{C}$ PREADD. X_1, X_2 di $\mathcal{C}$

SONO EQUIVALENTI

(1) $\mathcal{C}$ ha un prodotto $(X_1 \times X_2, p_1, p_2)$

(2) " " coprod. $(X_1 + X_2, i_1, i_2)$

(3) $\mathcal{C}$ ha un BIPRODOTTO

$(X_1 \oplus X_2, i_1, i_2, p_1, p_2)$

t.c.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[l, bend right, "p_1"'] \arrow[r, bend left, "p_2"] & X_2 \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

$$p_j i_j = 1_{X_j} \qquad p_j i_k = 0 \quad j \neq k$$

$$i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_{X_1 \oplus X_2}$$

Dim ① $\Rightarrow$ ③

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "1"'] \arrow[d, "{\langle 1,0\rangle =: i_1}"] \arrow[dr, "0"] & \\ X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X_2 \\ & X_2 \arrow[ul, "0"] \arrow[u, "{\langle 0,1\rangle =: i_2}"'] \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}$$

$$p_j i_j = 1 \qquad p_j i_k = 0 \quad k \neq j$$

$$i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_{X_1 \times X_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} p_1 (i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_1 \\ p_2 (\qquad\qquad) = p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{p_1 i_1}_{1} p_1 + \underbrace{p_1 i_2}_{0} p_2 \overset{?}{=} p_1 & \text{sì} \\ \underbrace{p_2 i_1}_{0} p_1 + \underbrace{p_2 i_2}_{1} p_2 \overset{?}{=} p_2 & \text{sì} \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow$ (1) $X_1 \oplus X_2$ è un prodotto con p_1, p_2

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, shift left, dashed, "i_1"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[l, shift left, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X_2 \arrow[l, shift left, dashed, "i_2"] \\
& Z \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "\langle f, g \rangle"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

$\langle f, g \rangle := i_1 f + i_2 g$

$$p_1 \langle f, g \rangle = p_1 (i_1 f + i_2 g) =$$

$$= \underbrace{p_1 i_1}_{1} f + \underbrace{p_1 i_2}_{0} g = f$$

$$p_2 \langle f, g \rangle = g$$

Sia $h : Z \longrightarrow X_1 \oplus X_2$

$$p_1 h = f \qquad p_2 h = g$$

$$h = 1_{X_1 \oplus X_2} \cdot h = (i_1 p_1 + i_2 p_2) h =$$

$$= i_1 \underbrace{p_1 h}_{f} + i_2 \underbrace{p_2 h}_{g} = \langle f, g \rangle$$

DUALE ② $\Leftrightarrow$ ③

$\Box$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i_1"'] \arrow[dr, "h"'] & X_1 \oplus X_2 \arrow[d, "\exists! \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}"] & X_2 \arrow[l, "i_2"] \arrow[dl, "k"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h\, p_1 + k\, p_2$$

NOTA $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = p_1 + p_2 = \nabla$ CODIAGONALE

$i_1 + i_2 = \langle 1, 1 \rangle : X \longrightarrow X \oplus X$

Δ diagonale

Df $\mathbb{C}$ è ADDITIVA se è preadditiva con zero oggetto e biprodotti $\Leftrightarrow$ ogg iniziale e coprodotti binari $\Leftrightarrow$ ogg finale e " "

OSS $\oplus$ ADD.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "h"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "{\langle f,g\rangle}"] \arrow[dr, "g"'] & A\oplus B \arrow[r, "\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}"'] & Y \\
 & B \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\langle f,g\rangle &= (h\,p_1 + k\,p_2)\langle f,g\rangle \\
&= h\,p_1\langle f,g\rangle + k\,p_2\langle f,g\rangle \\
&= hf + kg
\end{aligned}
$$

$$\Delta = i_1 + i_2 = \langle 1,1\rangle$$

$$C \longrightarrow C\oplus C \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} C$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\langle 1,1\rangle = 0$$

$$x \longrightarrow (x,x) \longrightarrow x - x = 0$$

TS $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \operatorname{coker}\langle 1,1\rangle$

$= \operatorname{Coeq}(\langle 1,1\rangle, 0)$

Df $\operatorname{coker} f = (Q, q)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "t"'] & Q \arrow[d, "\varphi"] \\ & & {} \end{tikzcd}$$

- $q f = 0_{XQ}$
- $t f = 0 \Rightarrow \exists!\, \varphi \quad \varphi q = t$

chi è 0 ?

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "0_{XY}"] \arrow[dr, "0_{X0} = t_X"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & Y \\ & 0 \arrow[ur, "i_Y = 0_{0Y}"'] & \end{tikzcd}$$

0 oggetto

Ex $\operatorname{Coeq}(f, 0) = \operatorname{Coker} f$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \operatorname{coker}\langle 1,1\rangle$$

$$\bullet\ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\langle 1,1\rangle = 0$$

$$\bullet\bullet\quad \begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "i_2"] & \\
C \arrow[r, "\langle 1{,}1\rangle"] & C\oplus C \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[dl, dashed, "\exists!\, g"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

$$f\langle 1,1\rangle = 0$$

$$\shortparallel$$

$$f(i_1 + i_2) = 0 \qquad f i_2 = -f i_1$$

$$g := f i_1$$

$$g\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = g(p_1 - p_2) = g p_1 - g p_2$$

$$= f i_1 p_1 \underbrace{- f i_1 p_2} =$$

$$= f i_1 p_1 + f i_2 p_2 = f(\underbrace{i_1 p_1 + i_2 p_2}_{1})$$