TC

16/10/15

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, bend right, "\beta"'] & \\ P \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{g}"'] \arrow[dr, "h"] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Il pull back di (prodotto fibrato) f lungo g è dato da $(P, \bar{f}, \bar{g})$ t.c.

1) $g\bar{f} = f\bar{g}$

2) $\forall\, \alpha, \beta$ $\quad g\alpha = f\beta$ $\quad \exists!\, k : V \to P$ $\quad \bar{f}k = \alpha$ e $\bar{g}k = \beta$

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d] \\ 1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} = \mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathcal{C} \qquad \begin{tikzcd} & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & A_0 \end{tikzcd}$$

1) $\iff$ $\exists\, h : P \to B$ con

$$f\bar{g} = h = g\bar{f}$$

pull back di f lungo g è un limite su D (a patto di introdurre la diagonale)

Ma Set

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\bar f"] \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "\bar g"'] & & C \arrow[dd, "g"] \\
& A\times C \arrow[ur, "\pi_C"'] \arrow[dl, "\pi_A"] & \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A\times C \arrow[r, "\pi_C"] \arrow[d, "\pi_A"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & C \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$P = Eq(\tilde f, \tilde g) \hookrightarrow A\times C \underset{\tilde f = f\,\pi_A}{\overset{\tilde g = g\,\pi_C}{\rightrightarrows}} B$$

come al solito

$$P = \{(a,c) \mid f(a) = g(c)\} \hookrightarrow A\times C$$

EX Verificare che P è pull back di f lungo g

DUALE

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\tilde g"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] & \\
C \arrow[r, "\tilde f"'] \arrow[drr, bend right, "\beta"'] & Q \arrow[dr, dashed, "k"] & \\
& & V
\end{tikzcd}$$

$(Q, \tilde g, \tilde f)$ = push out di f lungo g

- $\tilde g f = \tilde f g$
- $\forall \alpha, \beta \quad \alpha f = \beta g$
  $\exists !\, k : Q \to V$
  $k \tilde f = \beta \quad k \tilde g = \alpha$

Df Una categoria $\mathcal{C}$ si dice (finitamente) completa / cocompleta se $\mathcal{C}$ ha limiti / colimiti se ogni

$D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ diagramma ($\mathbb{I}$ finita)

Th Ogni limite (finito) può essere ottenuto come equalizzatore di un prodotto (finito)

Dim

$D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ diagramma

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i = D_{\mathrm{dom}\, s} \\ \downarrow s & & \downarrow D s \\ j & & D_j = D_{\mathrm{cod}\, s} \end{array}$$

Supponiamo che $\mathcal{C}$ abbia prodotti ed equalizzatori

$ob(\mathbb{I})$ insieme $\qquad Arr(\mathbb{I})$ insieme

$$\prod_{i \in ob(\mathbb{I})} D_i \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \left(\prod_{s \in Arr(\mathbb{I})} D_{\mathrm{cod}\, s} ,\ \pi_s \right)$$

Φ, Ψ frecce su un prodotto sono univ. determinate dalle loro composizioni con le proiezioni π_s

Φ è definita da $\pi_s \Phi := \pi_{\mathrm{cod}\, s}$

$$
\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i \in Ob(T)} D_i \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi_{\mathrm{cod}\, s} = \pi_j"'] & \prod\limits_{s \in Arr} D_{\mathrm{cod}\, s} \arrow[d, "\pi_s"] \\
& D_{\mathrm{cod}\, s = j}
\end{tikzcd}
$$

Ψ è definito da $\pi_s \Psi := D s \cdot \pi_{\mathrm{dom}\, s}$

$$
\begin{tikzcd}
\prod D_i \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \prod\limits_{s \in Arr} D_{\mathrm{cod}\, s} \arrow[d, "\pi_s"] \\
D_{\mathrm{dom}(s) = i} \arrow[r, "Ds"] & D_{\mathrm{cod}\, s}
\end{tikzcd}
$$

Consideriamo $(E, e) = Eq(\Phi, \Psi)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "x"] & & & \\ E \arrow[r, "e"] & \prod_i D_i \arrow[r, shift left, "\Phi"] \arrow[r, shift right, "\Psi"'] & \prod_s D_{\mathrm{cod}\, s} \arrow[r, "\pi_s"] & D_{\mathrm{cod}\, s} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\exists! k"'] \arrow[dr, "\exists! x"] \arrow[rr, bend left, "x_i'"] \arrow[ddrr, bend right, "x_j'"'] & & \\ E \arrow[r, "e"] & \prod_i D_i' \arrow[r, "\pi_i'"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & D_{\mathrm{dom}\, s} = i' \arrow[d, "Ds"] \\ & & D_{\mathrm{cod}\, s} = j' \end{tikzcd}$$

$\exists!\, x$

$\pi_i' x = x_i'$

$\pi_i' x$

$\|$

$D(s)\, x_i' =$

$x_j' =$

$\pi_j' x$

$\Updownarrow$

$D(s)\pi_i' x = \pi_j' x$

$\pi_s \underbrace{\Psi\, x} = \pi_s \underbrace{\Phi\, x}$

$\Rightarrow \Psi x = \Phi x$

$$\underbrace{D(s)\pi_i'}_{\pi_s \Psi} e = \underbrace{\pi_j'}_{\pi_s \Phi} e$$

abbiamo $e_i = \pi_i' e : E \longrightarrow D_i \quad \forall\, i \in I$

che è un cono su D

$$\begin{tikzcd} & D_i' \arrow[d, "D(s)"] \\ E \arrow[ur, "e_i'"] \arrow[dr, "e_j'"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & D_j \end{tikzcd}$$

Sia (X, x_i') un cono su D

$D(s)\, x_i' = x_j'$

Abbiamo $x : X \longrightarrow \prod_i D_i \overset{\Phi}{\underset{\Psi}{\rightrightarrows}} \prod D_{\mathrm{cod} f}$

$\Phi x = \Psi x$

$\Rightarrow \exists! k : X \to E \qquad x = ek$

$\Rightarrow e_i k = x_i$

(E, e_i) è un cono terminale su D

$\Rightarrow E$ è un limite su D in $\mathbb{C}$ $\square$

Corollario

cocompleto

$\mathbb{C}$ è (finitamente) completo $\Leftrightarrow$

coeq

$\mathbb{C}$ ha equalizzatori e prodotti

coprodotti

(finiti)

Proposizione

cocompleto

$\mathbb{C}$ è finitamente completo $\Leftrightarrow$

$\mathbb{C}$ ha oggetto terminale e

~~finale~~ iniziale

pullbacks

pushout.

Dim

$\Leftarrow$ ci basta dim che $\mathbb{C}$ ha prodotti finiti e equalizzatori.

- $\forall I$ insieme finito $(C_i)_{i \in I} \in \mathrm{ob}\, \mathbb{C}$

$\prod_{i \in I} C_i$

$I = \emptyset \qquad \prod_{i\in\emptyset} C_i = T$ oggetto terminale ✓

- $I = \{*\}$ il prodotto di $A_* = A$

$(A, 1_A)$

sa se $I = \{1,2\}$ e $X_1, X_2 \in \mathbb{C}$

$X_1 \times X_2$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_2 \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r] & T
\end{tikzcd}$$

(P, π_1, π_2) è un prodotto di X_1 e X_2 $(\in X)$

$$(X_1 \times X_2) \times X_3 \overset{\in X}{\cong} X_1 \times (X_2 \times X_3)$$

e sono entrambi istanze ~~prodotti~~ di $X_1 \times X_2 \times X_3$

e poi itero il procedimento per ottenere $\prod_{i\in I} X_i$ $\quad I$ finito

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \qquad Eq(f,g)$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \\
A \arrow[ur, "1_A"] \arrow[r, "\langle 1_A, f\rangle"] \arrow[dr, "f"'] & A \times B \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_B"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

$\exists! \langle 1_A, f\rangle : A \to A\times B$

grafico f

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "\exists! k"] \arrow[rrd, bend left, "v"] \arrow[dd, bend right, "v"'] & & & \\
P \arrow[rr, "m_2 = m"] \arrow[d, "m = m_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & & A \arrow[d, "\langle 1,g\rangle"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
A \arrow[rr, "\langle 1,f\rangle"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & & A\times B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"] & B \\
& & A &
\end{tikzcd}$$

$$\overbrace{\pi_A \langle 1,f\rangle}^{1} m_1 = \underbrace{\pi_A \langle 1,g\rangle}_{1} m_2 \implies m_1 = m_2 = m$$

$$\underbrace{\pi_B \langle 1,f\rangle}_{f} m = \underbrace{\pi_B \langle 1,g\rangle}_{g} m$$

Sia ora $v: V \longrightarrow A$ $\quad fv = gv$

$$\langle 1,g\rangle v = \langle 1,f\rangle v \iff \begin{cases} \underbrace{\pi_A \langle 1,g\rangle}_{1} v = \underbrace{\pi_A \langle 1,f\rangle}_{1} v \\ \underbrace{\pi_B \langle 1,g\rangle}_{g} v = \underbrace{\pi_B \langle 1,f\rangle}_{f} v \end{cases}$$

per la proprietà universale del pull back

$\exists!$ t.c. $mk = v \implies$

$(P, m) = Eq(f,g)$ $\square$

EX Costruire T terminale e Pullback a partire da prodotti finiti e equalizzatori

---

Set ha equalizzatori e coequalizzatori

prodotti $\prod_{i \in I} X_i$ $\forall I$ set

coprodotti (unione disgiunta)

Set è completo
cocompleto

$D : \mathbb{I} \longrightarrow$ **Set** un diagramma

una descrizione di un limite $(\mathcal{L}(D), l_i)$ di D in **Set**

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ (x_i)_{i \in \ldots} \in \prod_{i \in Ob(\mathbb{I})} D_i \;\middle|\; \forall_{s: i \to j} \ (D s)(x_i) = x_j \right\}$$

$$\| $$

$$Eq(\Phi, \Psi)$$

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{D s} & D_j \\ \psi & & x_j \\ x_i & & \end{array}$$

$$l_i : \mathcal{L}(D) \hookrightarrow \prod_i D_i \xrightarrow[\pi_i]{} D_i$$

I LIMITI come rappresentabilità di funtori

$\mathbb{C}$ categoria $\qquad D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ diagramma

$$\mathbb{C} \xrightarrow{H^X} Set$$

$\forall X \in ob(\mathbb{C})$

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathbb{C}}(X, D-) : \mathbb{I} \arrow[r] & Set \\
i \arrow[d, "s"] & Hom_{\mathbb{C}}(X, Di) \arrow[d, "Ds \cdot -"] \\
j & Hom_{\mathbb{C}}(X, Dj)
\end{tikzcd}$$

consideriamo $\mathcal{L}_X = \lim Hom_{\mathbb{C}}(X, D-) =$

$$= \left\{ (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in ob(\mathbb{I})} Hom_{\mathbb{C}}(X, Di) \;\middle|\; \forall s : i \longrightarrow j \quad D(s) \cdot f_i = f_j \right\}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} : \mathbb{C}^{op} \arrow[r] & \underline{Set} & \\
X \arrow[r, mapsto] & \mathcal{L}_X \arrow[d] & X \arrow[r, "f_i"] & D_i \\
Y \arrow[u, "g"] \arrow[r, mapsto] & \mathcal{L}_Y & Y \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$$(f_i) \mapsto (f_i g)$$

<u>Th</u> D ha limite in $\mathbb{C}$ $\iff$ $\mathcal{H}$ è rappresentabile