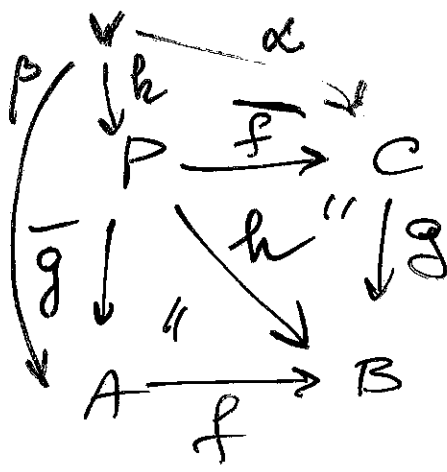


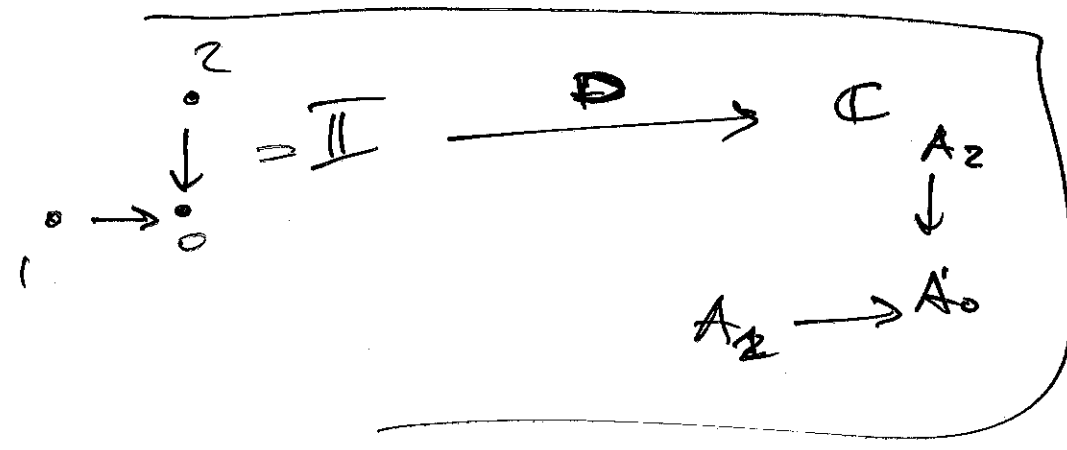
TC

16/10/15



pull back di
(prodotto fibrato)
f lungo g

è dato da (P, \bar{f}, \bar{g})



1) $\bar{g} \bar{f} = \bar{f}$

2) $\forall \alpha, \beta$

$$\bar{g} \alpha = \bar{f} \beta$$

$$\exists! k: V \rightarrow \Gamma$$

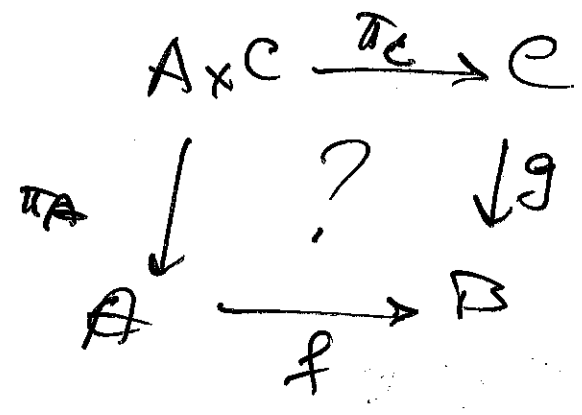
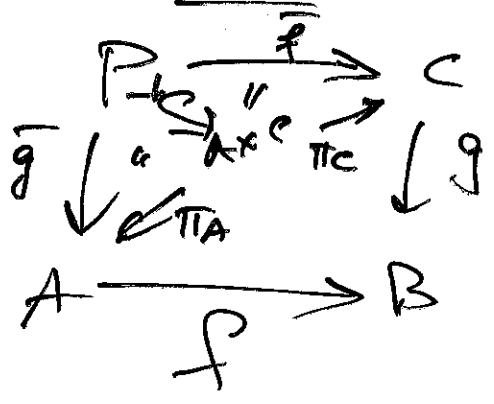
$$\bar{f} k = \alpha \quad \bar{g} k = \beta$$

1) $\Leftrightarrow \exists h: P \rightarrow B$ con

$$\bar{f} \bar{g} = h = \bar{g} \bar{f}$$

pull back di f lungo g è
una linea su D (a parte di
ritorno alla diagonale)

See Sec



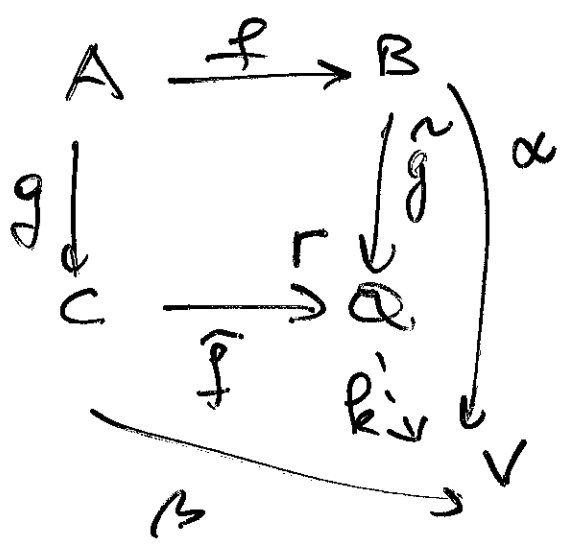
$$P = \{g^{-1}(f(a))\} \hookrightarrow A \times C \xrightarrow[\tilde{f} = f \circ \pi_A]{\tilde{g} = g \circ \pi_C} B$$

same of
or solve

$$P = \{ (a, c) \mid f(a) = g(c) \} \hookrightarrow A \times C$$

EX Verificare che P è pull back
di f lungo g

DUALE



- $(Q, \tilde{g}, \tilde{f}) = \text{push out of } f \text{ lungo } g$
- $\tilde{g} \circ f = f \circ g$
 - $\forall \alpha, \beta \quad \alpha \circ f = \beta \circ g$
 - $\exists \downarrow k : Q \rightarrow V$
 $k \circ f = \beta \quad k \circ g = \alpha$

Df Una categoria \mathcal{C} si dice
(finitamente) completa

se \mathcal{C} ha limiti e colimiti

$D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ diagramma (\mathbb{I} finita)

Th Ogni limite (finito) può
essere ottenuto come equalizzatore
di un prodotto (finito)

Dim

$D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ diagramma

i

$D_i = D \circ d_{i,s}$

$\downarrow s$

$\downarrow Ds$

j

$D_j = D \circ d_{j,s}$

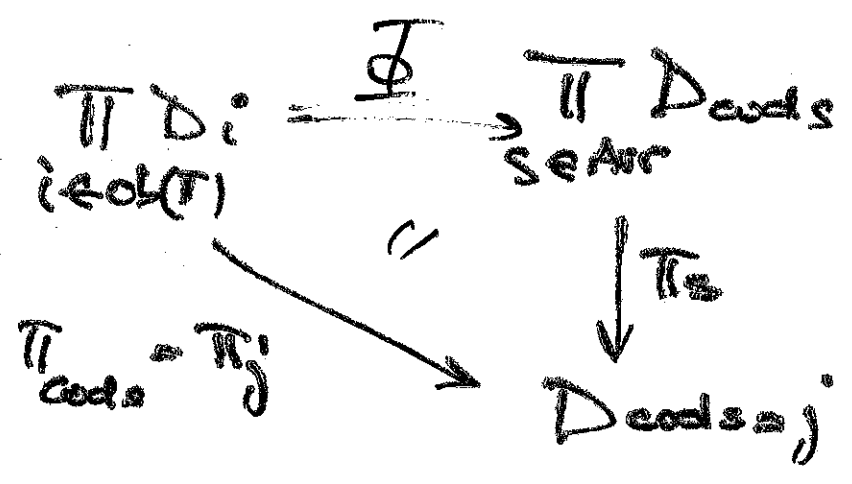
Supponiamo che \mathcal{C} abbia prodotti
ed equalizzatori

$ob(\mathbb{I})$ insieme \mathbb{I} $Arr(\mathbb{I})$ insieme

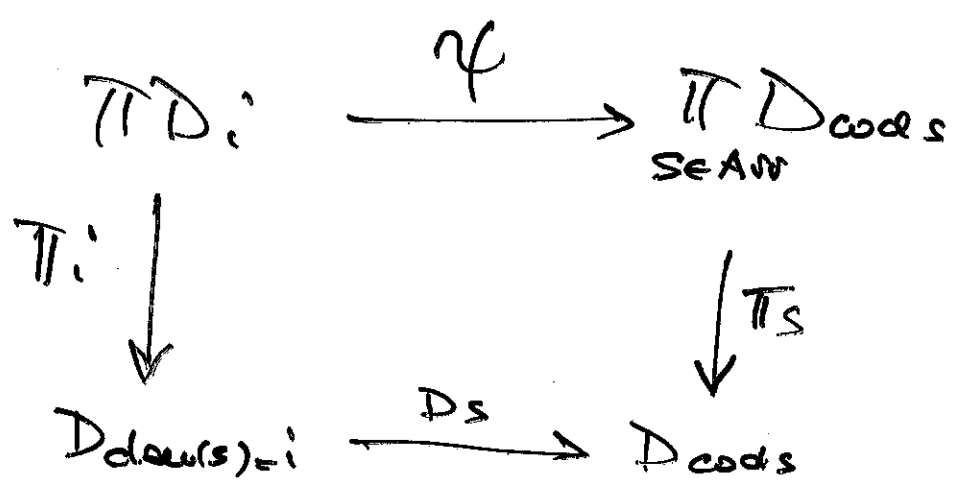
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{D_i} & \left(\prod_{s \in Arr(\mathbb{I})} D \circ d_{i,s}, \prod_s \right) \\ i \in ob(\mathbb{I}) & \xrightarrow{\chi} & \end{array}$$

Φ, γ frece su un prodotto solo
leic. determinate dalle loro
composizioni con le proiezioni π_s

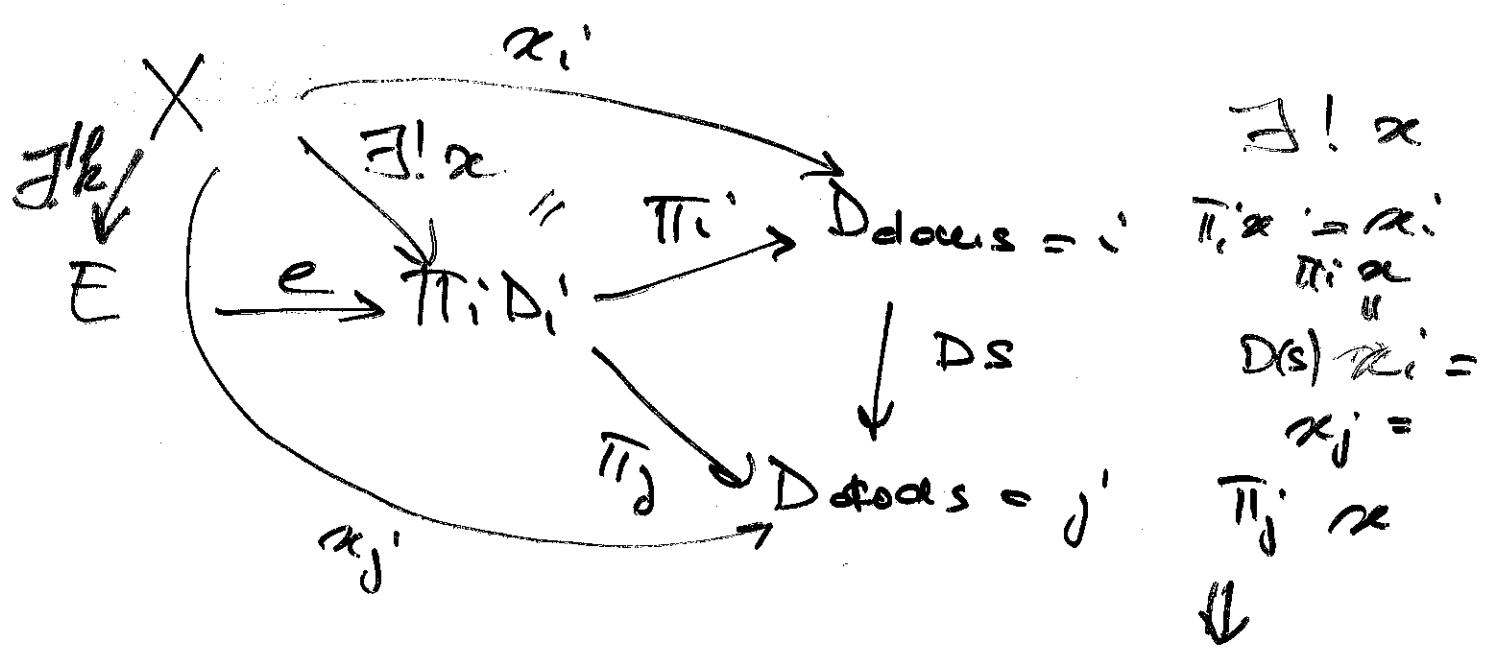
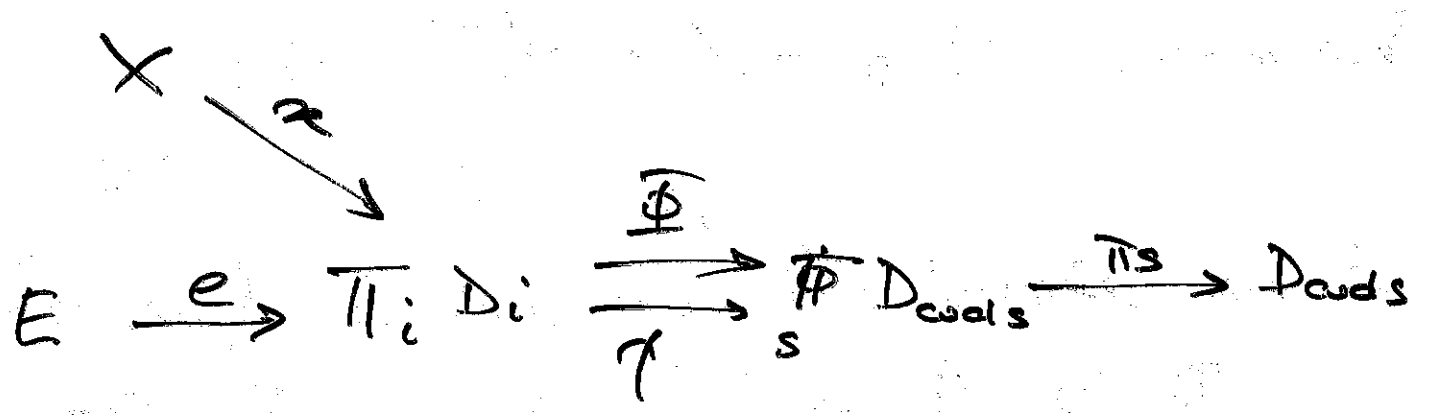
Φ è definita da $\pi_s \Phi := \pi_{cod_s}$



γ è definita da $\pi_s \gamma := D_s \cdot \pi_{dom_s}$



Considero $(E, e) = \text{Eq}(\Phi, \gamma)$



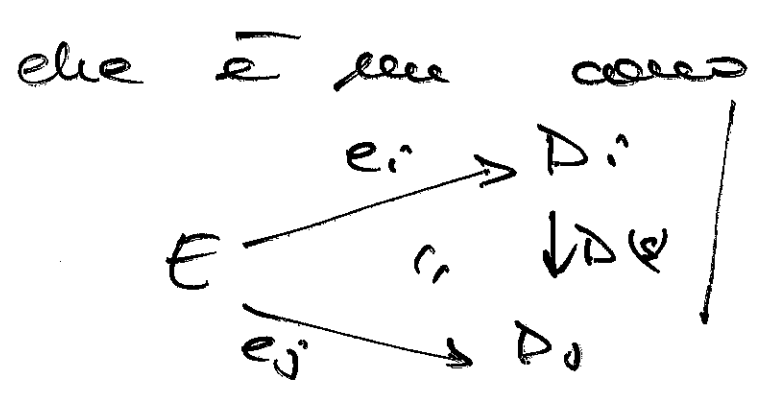
$$\underbrace{D(S) \pi_i e}_{\pi_S \gamma} = \underbrace{\pi_j e}_{\pi_S \Phi}$$

$$D(S) \pi_i \alpha = \pi_j \alpha$$

$$\pi_S \gamma \alpha = \pi_S \Phi \alpha$$

$$\Rightarrow \gamma \alpha = \Phi \alpha$$

chaves $e_i = \pi_i e : E \rightarrow D_i \forall i \in I$



Se (X, α_i) um
 cone em D
 $D(S) \alpha_i = \alpha_j$

Abbiamo $\alpha: X \rightarrow \prod_i D_i \xrightarrow[\alpha]{\beta} \prod D_{\text{cool}}$ (6)

$$\forall \alpha = \tau \alpha$$

$$\Rightarrow \exists k: X \rightarrow E \quad \alpha = ek$$

$$\Rightarrow \text{li } k = \alpha_i$$

(E, τ) è un core terminale su D

$\Rightarrow \tau$ è un core su D e τ □

Lemma

\mathcal{C} è (finitamente) cocomplete \Leftrightarrow cocomplete

\mathcal{C} ha equalizzatori e prodotti
(finita) coprodotti

Proposizione

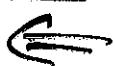
cocomplete

\mathcal{C} è finitamente cocomplete \Leftrightarrow

\mathcal{C} ha oggetto terminale e
finita
core

pullback
pushout.

Dim



ci basta dire che \mathcal{C} ha

prodotti finiti e equalizzatori.

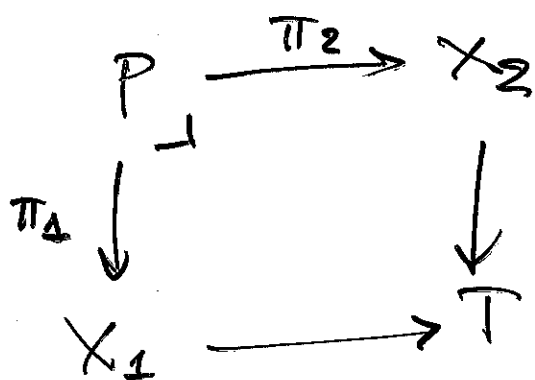
• $\forall I$ insieme finito $(C_i)_{i \in I}$ e ob \mathcal{C}
 $\prod_{i \in I} C_i$

$I = \emptyset$ $\iff \prod_{i \in \emptyset} C_i = T$ oggetto terminale \mathcal{C}

• $I = \{*\}$ il prodotto di $A_* = A$
 $(A, \{A\})$

sa se $I = \{1, 2\}$ e $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$

$X_1 \times X_2$

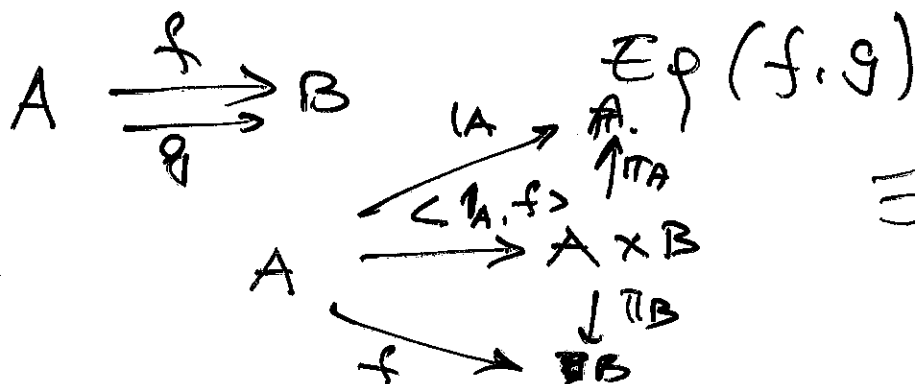


(P, π_1, π_2) è
 un prodotto di
 X_1 e X_2 ($\in \mathcal{C}$)

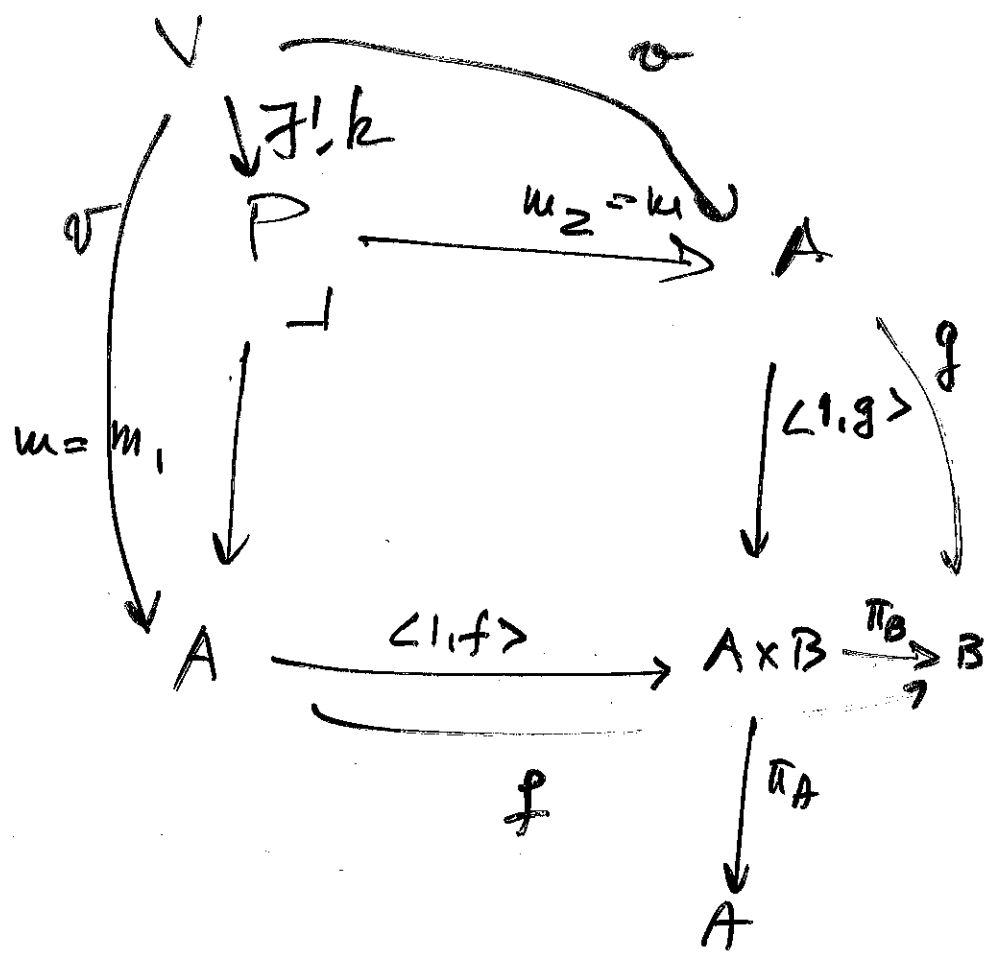
$$(X_1 \times X_2) \times X_3 \stackrel{\cong}{=} X_1 \times (X_2 \times X_3)$$

è vero entrambi i prodotti di X_1, X_2, X_3

e per iterazione di procedimenti per
 ottenere $\prod_{i \in I} X_i$ I finito



$\exists! \langle \pi_A, f \rangle: A \rightarrow A \times B$
 prof f



$$\begin{aligned} & \xrightarrow{1} \\ & \pi_A \langle 1, f \rangle m_1 = \\ & \pi_A \langle 1, g \rangle m_2 \\ & \xrightarrow{1} \\ & \implies m_1 = m_2 = m \end{aligned}$$

$$\underbrace{\pi_B \langle 1, f \rangle m}_f = \underbrace{\pi_B \langle 1, g \rangle m}_g$$

∃! $\sigma: V \rightarrow A$

$$f \sigma = g \sigma$$

$$\langle 1, g \rangle \sigma = \langle 1, f \rangle \sigma \iff \begin{cases} \frac{\pi_A \langle 1, g \rangle \sigma}{1} = \frac{\pi_A \langle 1, f \rangle \sigma}{1} \\ \frac{\pi_B \langle 1, g \rangle \sigma}{g} = \frac{\pi_B \langle 1, f \rangle \sigma}{f} \end{cases}$$

per la proprietà universale del pull back

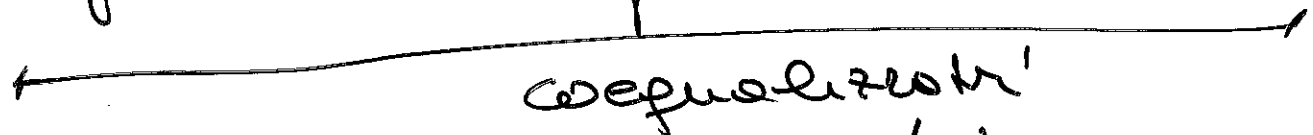
$$\exists! \text{ t.c. } m \circ k = \sigma \implies$$

$$(P, m) = \text{Eq}(f, g)$$



EX Cos'è un T terminale

e Pullback a partire da prodotti
finiti e equalizzatori



Set ha equalizzatori e
 prodotti $\prod_{i \in I} X_i$ $\forall I \text{ set}$
 coprodotti (nessa disgiunzione)

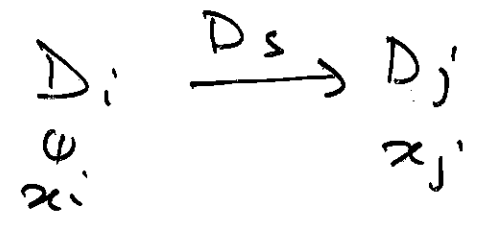
Set è cocompleta
 cocompleta

$D: I \rightarrow \text{Set}$ un diagramma
 una collezione di un oggetto

$(\mathcal{L}(D), l_i)$ di D è Set

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ (x_i)_{i \in \dots} \in \prod_{i \in \text{Ob}(I)} D_i \mid \forall s: i \rightarrow j \quad (D_s)(x_i) = x_j \right\}$$

$\mathcal{E}_p(\Phi, \Psi)$



$$l_i: \mathcal{L}(D) \hookrightarrow \prod_i D_i \xrightarrow{\pi_i} D_i$$

LIMITI come Rappresentazione di funtori (10)

\mathcal{C} categoria $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{C}$ diagramma
 $\forall x \in \text{ob}(\mathcal{C})$ $\downarrow H^x$
 set

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D-) : \mathbb{I} \longrightarrow \text{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \longrightarrow & \text{Set} \\ \downarrow s & & \downarrow D \cdot - \\ \mathbb{D} & & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D\mathbb{D}) \end{array}$$

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D_i)$

limes $L_X = \text{lim}_{\mathcal{C}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D-) =$

$$= \left\{ (f_i)_{i \in \mathbb{I}} \mid \begin{array}{l} \mathbb{I} \text{ Hom}_{\mathcal{C}}(X, D_i) \\ i \in \text{ob}(\mathbb{I}) \end{array} \right\}$$

$$\forall s: i \rightarrow j \quad D(s) \cdot f_j = f_i$$

$$\mathcal{H}: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & L_X & & X \xrightarrow{f_i} D_i \\ \uparrow g & & \downarrow (f_i) & & \uparrow g \\ Y & \xrightarrow{\quad} & L_Y & & Y \end{array}$$

$(f_i) \downarrow$
 $(f_i g) \downarrow$

\dashrightarrow

Th D ha limes in $\mathcal{C} \iff \mathcal{H}$ rappresentabile