

CT

18/12/15

$\forall C \in \mathbb{F}$  additive

$$C \xrightarrow{\langle 1, 1 \rangle = \Delta} C \oplus C \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} C$$

$$x \longrightarrow (a, a) \longrightarrow x - x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{coker}(\Delta)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle = 0 & \downarrow i_1 & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 C \xrightarrow{\Delta} C \oplus C & \xrightarrow{\quad} & C
 \end{array}$$

$$f \Delta = 0 \quad \begin{array}{c} f \\ \downarrow \\ x \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists g \\ \swarrow \\ \end{array}$$

$$g = f i_1 \quad g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f$$

$g$  é unico, fechado  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{epi}(g)$

$$C \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} i_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \langle 1, 0 \rangle = 1$$

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \implies A \xrightarrow{\langle f, g \rangle} B \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} B$$

es  $\mathbb{C}$  additivo  $f - g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \langle f, g \rangle$

$$= \text{coker}(\Delta) \langle f, g \rangle$$

• se c'è struttura  $\mathbb{C}$  det della struttura di linee colineari di  $\mathbb{C}$  additivo

NOTA se  $\mathbb{C}$  non additivo esse linee colineari non e puntate

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \quad A \xrightarrow{\langle f, g \rangle} B \oplus B \xrightarrow{\text{coker}(\Delta)} C \oplus B$$

$\mathbb{C}$  additivo

Ex  $m$  mono  $\iff \forall f, g \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} u$

$m f = m g \implies f = g$

$\iff m(f-g) = 0$

$\iff \forall h \quad m h = 0 \implies h = 0$

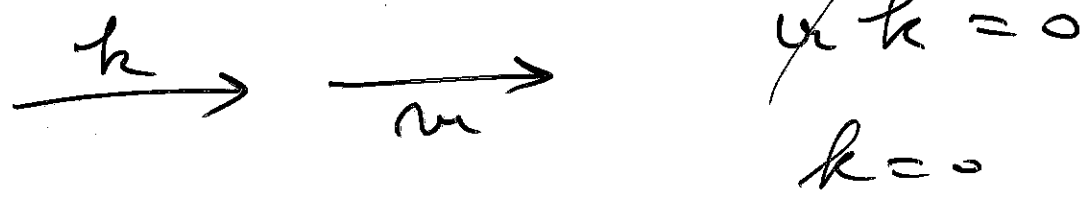
$\iff \forall h \quad h = 0 \implies h = 0$

$\mathbb{R}$  additivo

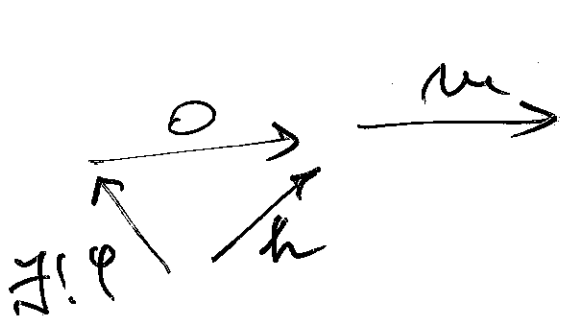
$m: X \rightarrow Y$  e  $f$  per  $m$ ,

$m$  è suriettivo  $\Leftrightarrow \ker m = 0$

Dm  $m$  suriettivo  $k = \ker m$



Vice sia  $k = \ker m = 0$



pr. univ. del  
per

se  $h$  è t.r.  
 $\ker h = 0 \quad \exists! \varphi$

$0, \varphi = h \Rightarrow h = 0$

$\Rightarrow m$  è suriettivo

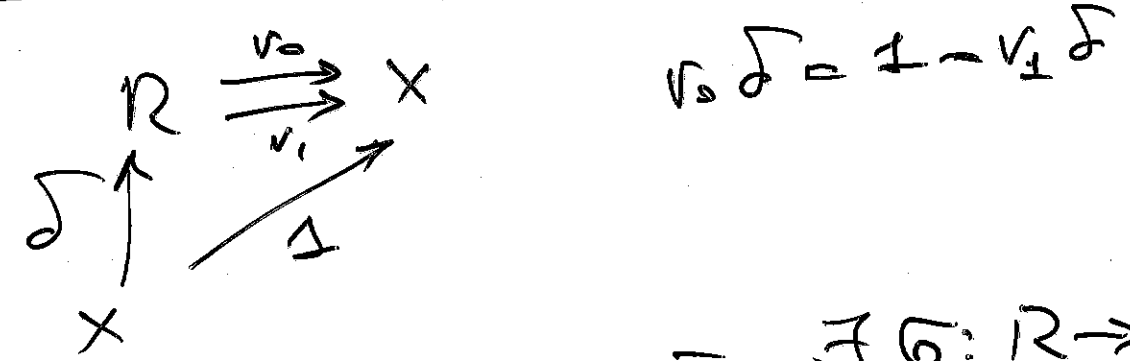
DUALITÀ: se esiste coker  $e$   
e è epi  $\Leftrightarrow \text{coker } e = 0$

$\mathbb{C}$  adalittiva con uniti finiti

$\Rightarrow \mathbb{C}$  è una categoria di moduli, r.p.

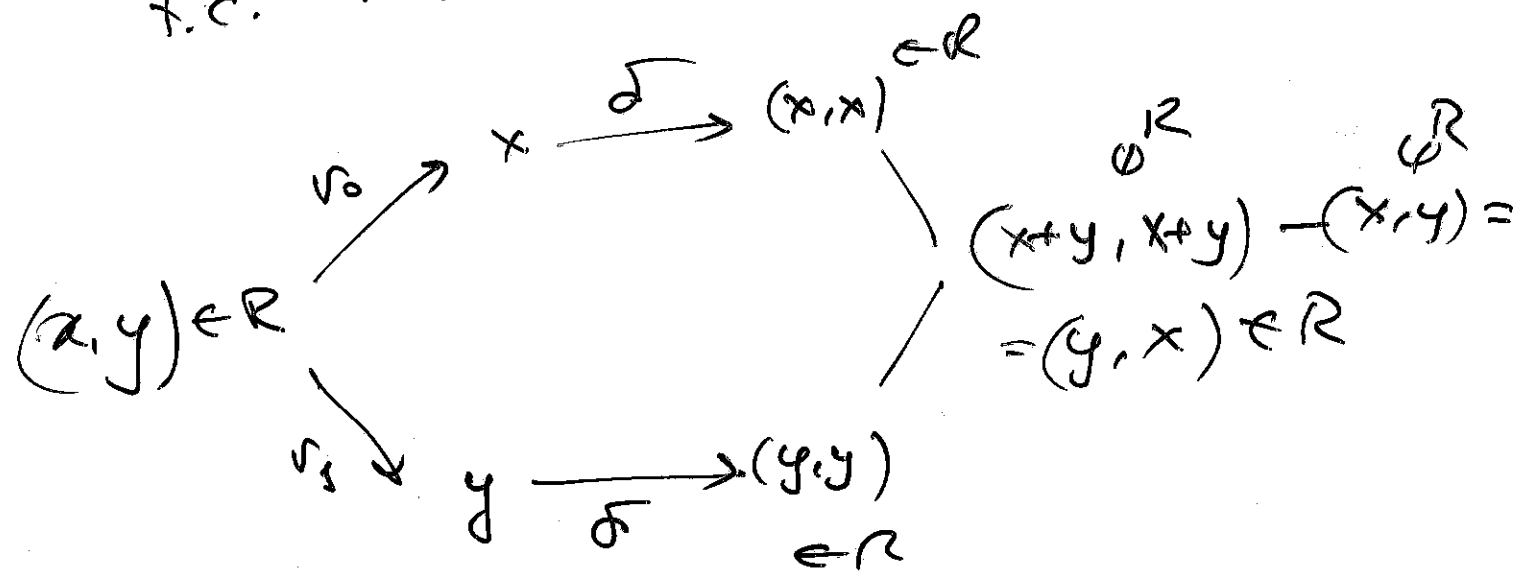
e  $\mathbb{C}$  ogni nel riflessiva e di equis.

Dimo  $R$  riflessiva su  $X$



$\Rightarrow R$  è simmetrica, cioè  $\exists \sigma: R \rightarrow R$

t.c.  $\nu_0 \sigma = \nu_1$      $\nu_1 \sigma = \nu_0$



$$\sigma := \sigma \nu_0 + \sigma \nu_1 - 1_R$$

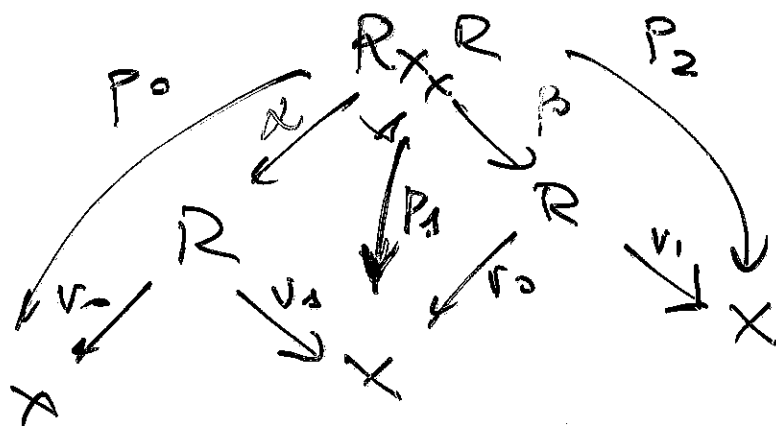
$$\nu_0 \sigma = \underbrace{\nu_0 \sigma \nu_0}_1 + \underbrace{\nu_0 \sigma \nu_1}_1 - \nu_0 = \nu_1$$

$$\nu_1 \sigma = \nu_0$$

$\Rightarrow R$  è simm

$R$  è anche transitive:

3

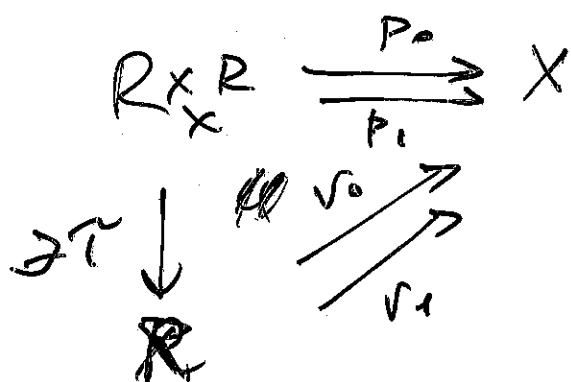


$\alpha R \gamma R z$

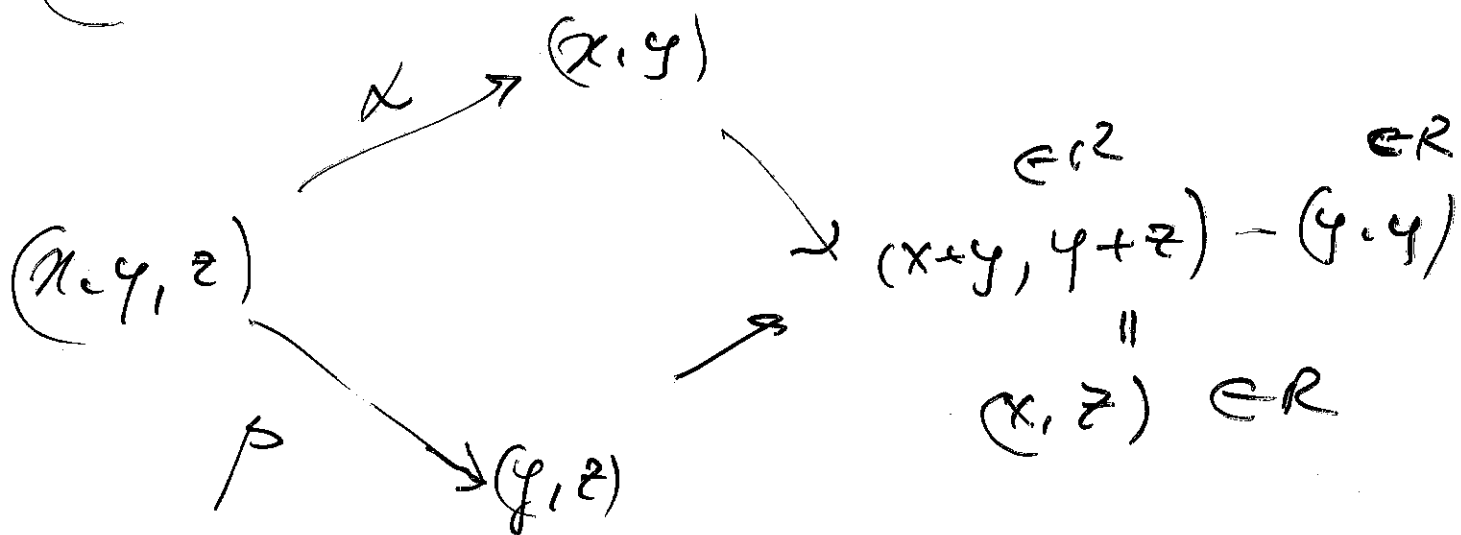
$$p_0 = x$$

$$p_2 = z$$

$$p_1 = y$$



$$(x, y, z) \in R \times_x R \Leftrightarrow \alpha R \gamma R z$$



$$P_0 = \alpha + \beta - \delta P_1$$

$$P_2 = \dots = P_1$$

$$v_0 P_0 = \underbrace{v_0 \alpha}_{P_0} + \underbrace{v_0 \beta}_{P_1} - \underbrace{v_0 \delta}_1 P_1 = P_0$$

Df  $A$  è una categoria abeliana se (6)

- ①  $A$  ha 0 oggetto
- ②  $A$  ha prodotti e coprodotti binari
- ③ in  $A$  ogni fazione ha un kernel e un cokernel
- ④ ogni mono è un kernel e ogni epi è un cokernel

oss è una definizione auto-duale  
 $A$  è abeliana  $\Leftrightarrow A^{op}$  è abeliana

ESEMP

Ab,  $R$ -mod  
 $cop$

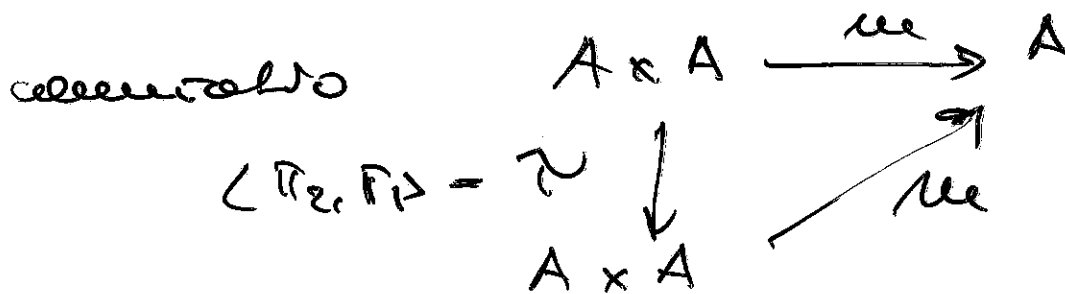
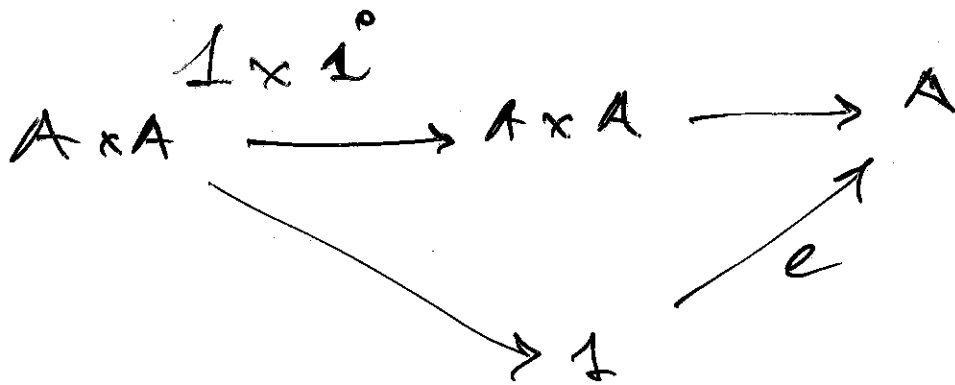
Ab  $\forall \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$  con l'insieme finito, posso def  
un gruppo (abeliano) unitario a  $\mathbb{C}$   
è dato da  $(A, m, i, e)$  con  $A \subset \mathbb{C}$

$$m: A \times A \rightarrow A \quad i: A \rightarrow A \quad e: 1 \rightarrow A \quad *$$

t.c.  $(m, i, e)$  universo di oggetti  
 e sia la mappa "inverso"

$$(x, i(x)) \xrightarrow{m} e$$



ottenere una categoria di oggetti  
 gruppi abeliani  $Ab(\mathcal{C})$   
 dove i morfismi sono le frecce  
 di  $\mathcal{C}$  che rispettano moltiplicazione

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \times A & \xrightarrow{f \times f} & B \times B \\
 \downarrow \omega & \subset & \downarrow \omega \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$



$\&$   $\mathbb{C}$  ha omni prop.  $\Rightarrow$   $Ab(\mathbb{C})$  è  
esattamente

$\&$   $\mathbb{C}$  è esatto  $\Rightarrow$   $Ab(\mathbb{C})$  è  
anche esatto

cioè  $Ab(\mathbb{C}) = \text{esatto} +$   
esatto = abeliano

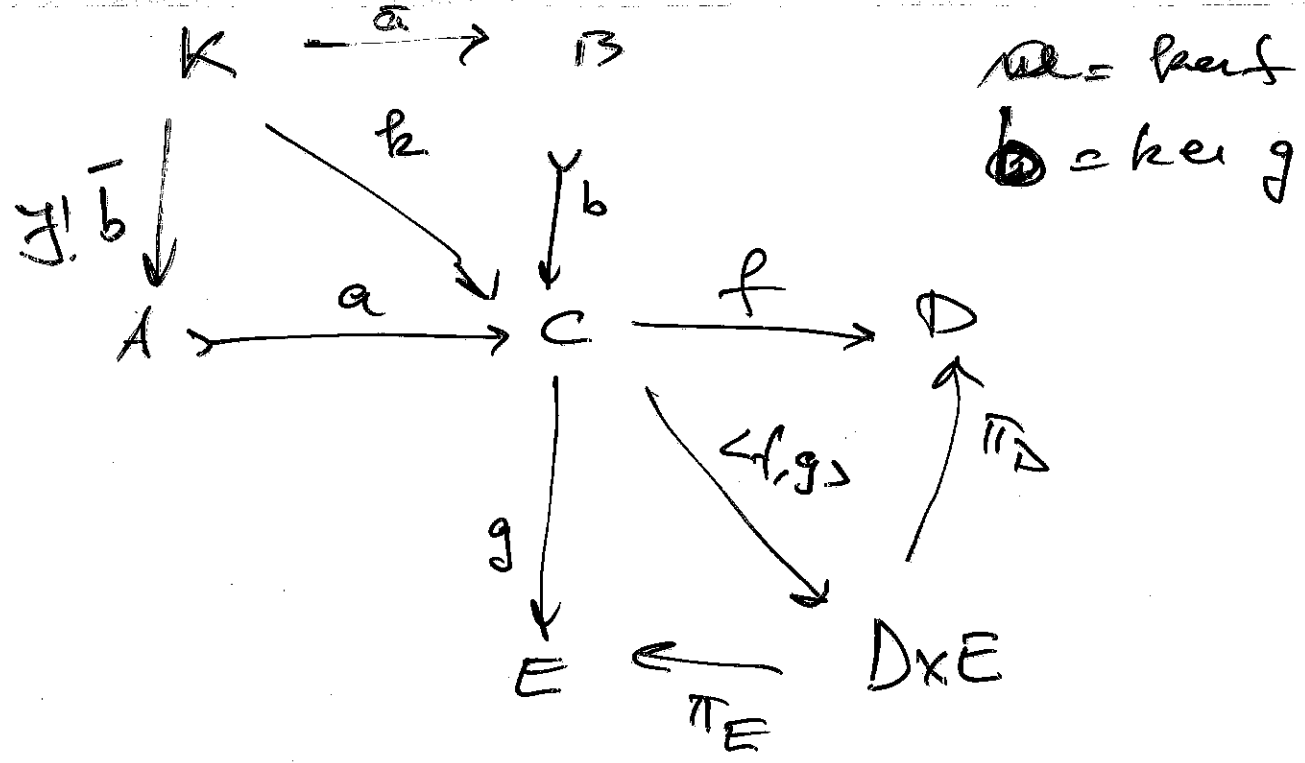
### Proposizione

$A$  abeliano  $\Rightarrow$   $A$  ha omni  
e esatto prop.

Def.  $\text{Pobli} A$  ha prodotti  
lunghi e fini, ha prodotti finiti  
per noi e basta altri che ha  
equalizzatori

l'immagine con  $a: A \rightarrow C$  nuovo  
 $b: B \rightarrow C$

e altri che  $\exists$  il suo pullback

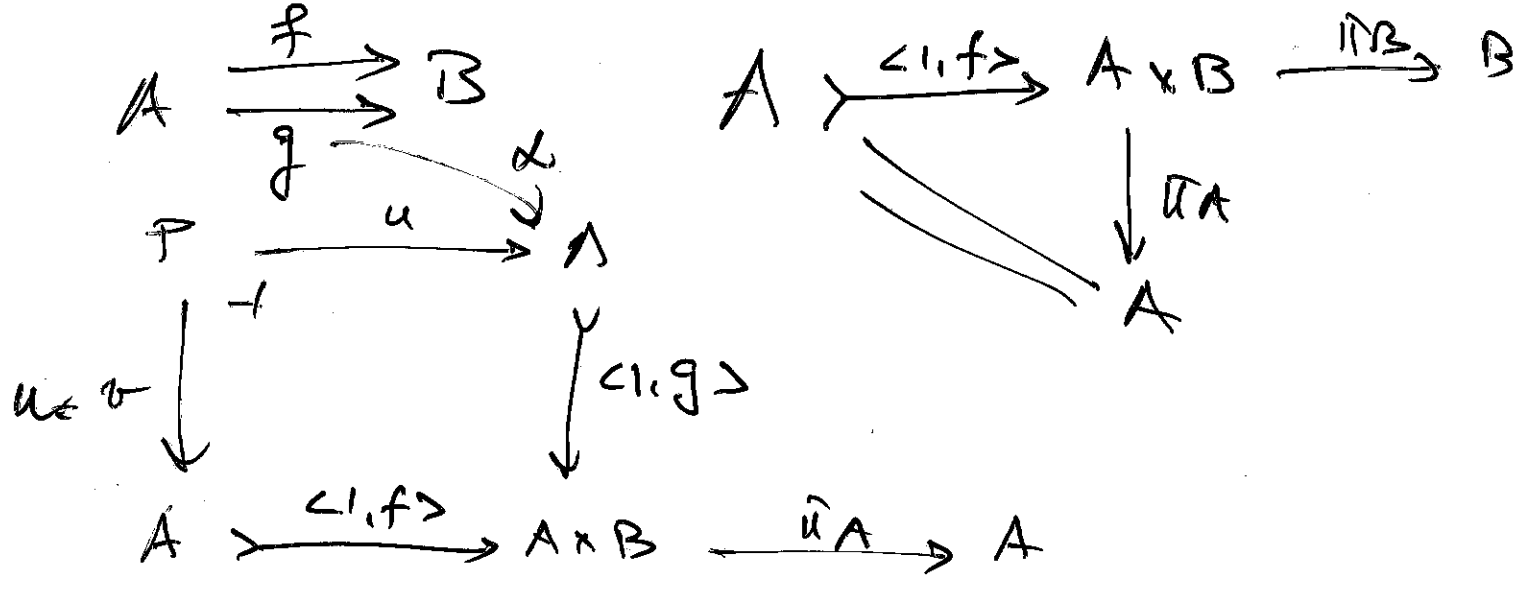


$\exists! k: K \longrightarrow C \quad k = \ker \langle f, g \rangle$

$f \circ k = \pi_D \circ \langle f, g \rangle \circ k = 0 \quad \exists! \bar{b}: C \xrightarrow{a} \bar{b} = k$   
 $g \circ k = 0 \quad \exists! \bar{a} \quad b \bar{a} = k$

il quadrato così costruito è sempre di  
 a lungo b

• ESISTENZA? A EQUALIZZATORI



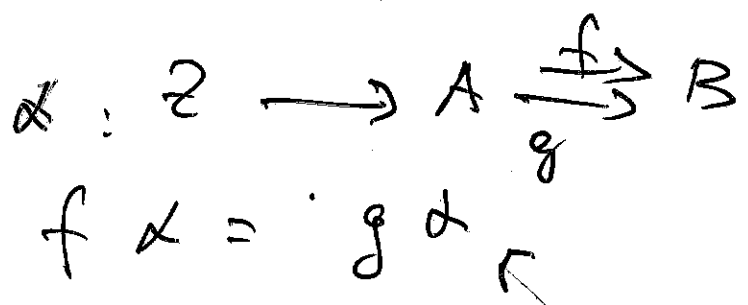
element:  $u = v$

$$\underbrace{\pi_A \langle 1, g \rangle u}_{1_A} = \underbrace{\pi_A \langle 1, f \rangle v}_{1_A}$$

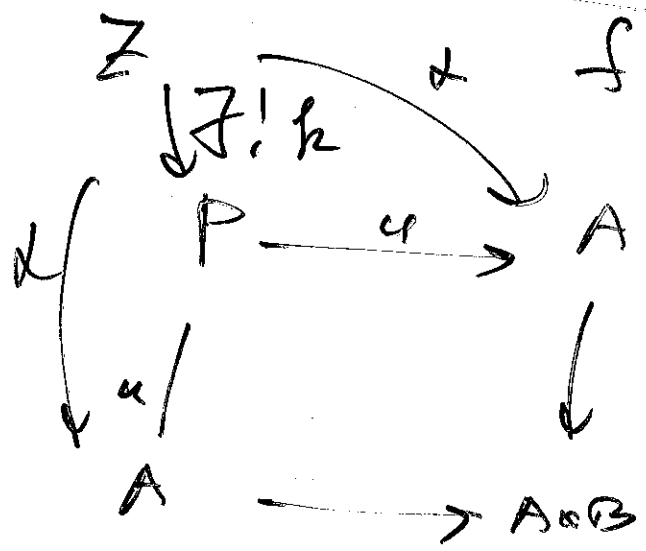
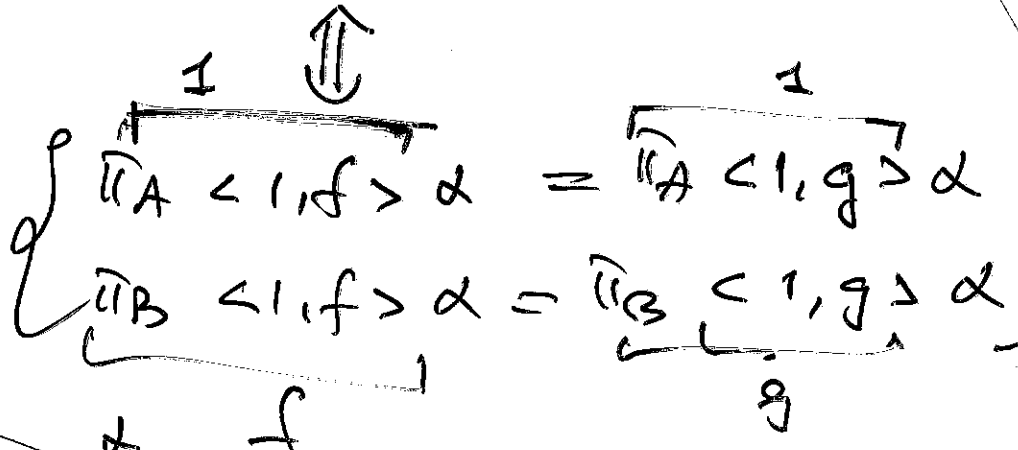
$$\Rightarrow \bullet) f u = g u$$

$$\underbrace{\pi_B \langle 1, g \rangle u}_g = \underbrace{\pi_B \langle 1, f \rangle u}_f$$

$\bullet \bullet) p.p. \text{ leer}$



also  $\langle 1, f \rangle \alpha = \langle 1, g \rangle \alpha$



p. univ. p.p.

$$u h = d$$

$$\Rightarrow u = \text{Ep}(f, g)$$

□

A abeliana

$\ker \mu = 0 \iff \ker \mu = 0$

$e \text{ epi} \iff \text{coker } e = 0$

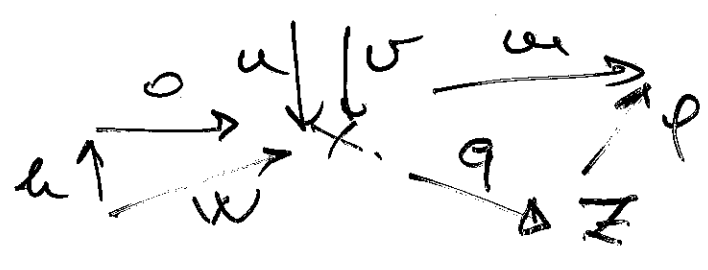
Diu

$\implies$  caso

$\Leftarrow$  Sepp che  $\ker \mu = 0$

TS  $\mu$  è mono,  $\text{coim}$  dati  
 $\mu u = u v$

TS  $u = v$



Se  $q = \text{coeq}(u, v)$   $\exists! \varphi$   $\varphi q = u$

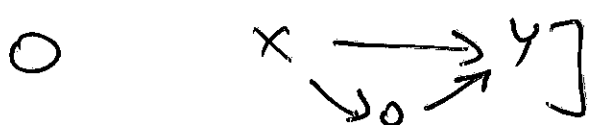
$q$  reg epi  $\implies q$  epi  $q = \text{coker}(w)$

$q w = 0 \iff \varphi q w = \mu w = 0$

ker  $\mu = 0 \iff \exists! h$  t.c.  $0 h = w = 0$

$q = \text{coker}(0) \iff q \text{ è mono (EX)}$

[per 0: prova che fallisce per e'etto



$g$  é monomorfismo  $g u = g v$

(12)

$$\Rightarrow u = v$$

□

$\Rightarrow$   $u = v$

$A$  abeliana

$u$  é monomorfismo



$\ker u = 0$



$\forall x \in \ker u \Rightarrow x = 0$

$x$



$u = \ker(\ker u)$

DMU ( $\in x$ )

OSS  $f$  monomorfismo + epi  $\Leftrightarrow f$  iso



$\Rightarrow f \in \ker g$

$$g f = 0 \Rightarrow g = 0$$

$$\Rightarrow f = \ker(0) \Rightarrow f \text{ iso}$$

Propositione

~~A~~ abeliana  $\Rightarrow$  ~~A~~ abeliana

due

Abeliana = preabeliana + 0 +  
"proclott." b'ne

$$A \xrightarrow{\Delta} A \times A \xrightarrow{q} Q$$

$$q = \text{coker } \Delta$$

$$\underline{\underline{IS}} \quad Q \cong A$$

sei Ab  $Q \cong \frac{A \times A}{\Delta}$

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \Delta$$

$$\Leftrightarrow x - x' = y - y' \Leftrightarrow$$

$$x - y = x' - y'$$

NOTA  $(x, y) \sim (x - y, 0)$

$$A \times A \longrightarrow Q \xrightarrow{\varphi} A$$

$(x, y) \quad [x, y] \quad x - y$   
 $[x - y, 0]$

$\varphi$  isom w  $AB_r$

$$A \xrightarrow{\langle 1, 0 \rangle} A \times A \xrightarrow{q} Q \xrightarrow{\varphi} A$$

$x \quad (x, 0) \quad [x, 0] \quad x$

$\varphi \cdot r = 1_A$

$$Q \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{r} Q$$

$[x, y] \longrightarrow (x - y) \quad [x - y, 0]$

$\varphi = r^{-1} \quad r = \varphi^{-1}$

if  $A$  abelian

$r = q \langle 1, 0 \rangle$

TS  $r$  iso  $\iff r$  mono + e.p.