CT

18/12/15

$\forall \; C \in \mathcal{A}$ additiva

$$C \xrightarrow{\langle 1,1\rangle = \Delta} C \oplus C \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} C$$

$$x \longrightarrow (x, x) \longrightarrow x - x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{coker}(\Delta)$$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "i_1"] \arrow[dr, bend left, equal] & \\
C \arrow[r, "\Delta"] & C \oplus C \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[dl, dashed, "\exists g"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

• $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle = 0$

$f \Delta = 0$

$g = f i_1 \qquad g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f$

g è unico, perché $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è epi (split)

$$C \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} i_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \langle 1, 0 \rangle = 1$$

L2

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \Longrightarrow A \xrightarrow{\langle f,g\rangle} B\oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} B$$

se $\mathcal{C}$ additiva $\quad f - g = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\langle f,g\rangle$

$= \mathrm{coker}(\Delta)\langle f,g\rangle$

- se c'è struttura additiva è det dalla struttura di lim e colim di $\mathcal{C}$

NOTA se $\mathcal{C}$ non ~~additiva~~ additiva con lim colim finiti e puntata

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \qquad A \xrightarrow{\langle f,g\rangle} B\times B \xrightarrow{\mathrm{coker}(\Delta)} C+B$$

$\mathcal{C}$ additiva

Ex $\quad m$ mono $\Longleftrightarrow \forall f,g \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \xrightarrow{m}$

$m f = m g \Rightarrow f = g$

$\Updownarrow$

$m(f-g) = 0$

$\Longleftrightarrow \forall h \quad mh = 0 \Rightarrow h = 0$

e epi $\Longleftrightarrow \forall h \quad he = 0 \Rightarrow h = 0$

$\mathcal{C}$ additiva

$u : X \to Y$ se $\exists \ker u$,

u è mono $\Longleftrightarrow \ker u = 0$

<u>Dim</u> u mono $\quad k = \ker u$

$$\xrightarrow{k} \quad \xrightarrow{u}$$

$u k = 0$

$k = 0$

<u>Vice</u> sia $k = \ker u = 0$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "0"] & \cdot \arrow[r, "u"] & \cdot \\ \cdot \arrow[u, "\exists!\varphi"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

pr. univ. del ker

se h è t.c.

$u h = 0 \quad \exists! \varphi$

$0 \cdot \varphi = h \implies h = 0$

$\implies u$ è mono

<u>DUALE</u>: se esiste coker e

e è epi $\Longleftrightarrow$ coker $e = 0$

$\mathbb{C}$ additiva con limiti finiti

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ è una categoria di Mal'cev, i.e.

in $\mathbb{C}$ ogni rel riflessiva è di equiv.

<u>Dim</u> R riflessiva su X

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "r_0"] \arrow[r, shift right, "r_1"'] & X \\ X \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd} \qquad r_0\delta = 1 = r_1\delta$$

$\Rightarrow$ R è simm, cioè $\exists\, \sigma : R \to R$

t.c. $r_0\sigma = r_1$ $\quad r_1\sigma = r_0$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r, "\delta"] & (x,x)\in R \\ (x,y)\in R \arrow[ur, "r_0"] \arrow[dr, "r_1"'] & & \\ & y \arrow[r, "\delta"'] & (y,y)\in R \end{tikzcd}$$

$\overset{\in R}{(x+y,\, x+y)} - \overset{\in R}{(x,y)} = (y,x) \in R$

$$\sigma := \delta r_0 + \delta r_1 - 1_R$$

$$r_0\sigma = \underbrace{r_0\delta}_{1} r_0 + \underbrace{r_0\delta}_{1} r_1 - r_0 = r_1$$

$$r_1\sigma = \qquad\qquad = r_0$$

$\Rightarrow$ R è simm

R è anche transitiva:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & R\times_X R \arrow[dll, "\alpha"'] \arrow[d, "p_1"] \arrow[drr, "\beta"] \arrow[ddlll, bend right, "p_0"'] \arrow[ddrrr, bend left, "p_2"] & & & \\
 & R \arrow[dl, "r_0"'] \arrow[drr, "r_1"] & & X & & R \arrow[dll, "r_0"'] \arrow[dr, "r_1"] & \\
X & & & & & & X
\end{tikzcd}$$

$xRyRz$

$p_0 = x$

$p_2 = z$

$p_1 = y$

$$\begin{tikzcd}
R\times_X R \arrow[r, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] \arrow[d, "\exists \tau"'] & X \\
R \arrow[ur, shift left, "r_0"] \arrow[ur, shift right, "r_1"'] &
\end{tikzcd}$$

$(x, y, z) \in R\times_X R \iff xRyRz$

$$\begin{tikzcd}
 & (x,y) \arrow[dr] & \\
(x,y,z) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \overset{\in R^2}{(x+y, y+z)} - \overset{\in R}{(y,y)} \\
 & (y,z) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\| $$

$$(x, z) \in R$$

$\tau := \alpha + \beta - \delta p_1$

$r_1 \tau = \ldots = p_2$

$r_0 \tau = \underbrace{r_0 \alpha}_{p_0} + \underbrace{r_0 \beta}_{p_1} - \underbrace{r_0 \delta}_{1} p_1 = p_0$

Df $\mathbb{A}$ è una categoria abeliana se

① $\mathbb{A}$ ha 0 oggetto

② $\mathbb{A}$ ha prodotti e coprodotti binari

③ in $\mathbb{A}$ ogni freccia ha un kernel e un cokernel

④ ogni mono è un kernel e ogni epi è un cokernel

OSS è una definizione autoduale

$\mathbb{A}$ è abeliana $\Leftrightarrow$ $\mathbb{A}^{op}$ è abeliana

ESEMPI

Ab, R-mod

Ab$^{\mathbb{C}^{op}}$ $\forall\, \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ con lim finiti, posso def un gruppo (abeliano) interno a $\mathbb{C}$ è dato da (A, m, i, e) con $A \in \mathbb{C}$

$m: A\times A \longrightarrow A \qquad i: A \longrightarrow A \qquad e: 1 \longrightarrow A$

t.c. (m, e) monoide interno

i sia la mappa «inverso»

$$(x, i(x)) \xrightarrow{m} e$$

$$\begin{tikzcd}
A\times A \arrow[r, "1\times i"] \arrow[dr] & A\times A \arrow[r] & A \\
& 1 \arrow[ur, "e"'] &
\end{tikzcd}$$

commutativo
$$\begin{tikzcd}
A\times A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\langle \pi_2, \pi_1\rangle = \tau"'] & A \\
A\times A \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

ottengo una categoria di oggetti gruppi abeliani $Ab(\mathcal{C})$ dove i morfismi sono le frecce di $\mathcal{C}$ che rispettano moltiplicazione

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$\begin{tikzcd}
A\times A \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B\times B \arrow[d, "m"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Se $\mathbb{C}$ ha limiti finiti $\Rightarrow$ $Ab(\mathbb{C})$ è additiva

Se $\mathbb{C}$ è esatta $\Rightarrow$ $Ab(\mathbb{C})$ è anche esatta

cioè $Ab(\mathbb{C})$ = add + esatta = abeliana

Proposizione

$\mathcal{A}$ abeliana $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ha limiti e colimiti finiti

Dim. Poiché $\mathcal{A}$ ha prodotti binari e finali, ha prodotti finiti, allora che ha quindi ci basta equalizzatori

Limitiamo con $a: A \rightarrowtail C$ mono
$b: B \rightarrowtail C$

e dire che $\exists$ il loro pullback

$a = \ker f$

$b = \ker g$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\bar{a}"] \arrow[d, "\exists!\,\bar{b}"'] \arrow[dr, "k"] & B \arrow[d, tail, "b"] & \\
A \arrow[r, tail, "a"] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\langle f,g\rangle"] & D \\
& E & D\times E \arrow[l, "\pi_E"] \arrow[u, "\pi_D"']
\end{tikzcd}$$

Sia $k: K \longrightarrow C \quad k = \ker\langle f,g\rangle$

$f k = \pi_D \underbrace{\langle f,g\rangle k}_{0} = 0 \qquad \exists!\ \bar{b}$ t.c. $a\bar{b} = k$

$g k = 0 \qquad \exists!\ \bar{a} \quad b\bar{a} = k$

il quadrato così costruito è un pb di a lungo b

- ESISTENZA EQUALIZZATORI

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "\langle 1,f\rangle"] \arrow[dr, equal] & A\times B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"] & B \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u=v"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & A \arrow[d, tail, "\langle 1,g\rangle"] & \\
A \arrow[r, tail, "\langle 1,f\rangle"] & A\times B \arrow[r, "\pi_A"] & A
\end{tikzcd}$$

α

claim: $u = v$

$$\underbrace{\pi_A \langle 1, g\rangle}_{1_A} u = \underbrace{\pi_A \langle 1, f\rangle}_{1_A} v$$

$\Rightarrow$ •) $fu = gu$

$$\underbrace{\pi_B \langle 1, g\rangle}_{g} u = \underbrace{\pi_B \langle 1, f\rangle}_{f} u$$

••) pr. lim: $\alpha : Z \longrightarrow A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$

$f\alpha = g\alpha$

Alors $\langle 1, f\rangle \alpha = \langle 1, g\rangle \alpha$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \overbrace{\pi_A \langle 1, f\rangle}^{1} \alpha = \overbrace{\pi_A \langle 1, g\rangle}^{1} \alpha \\ \underbrace{\pi_B \langle 1, f\rangle}_{f} \alpha = \underbrace{\pi_B \langle 1, g\rangle}_{g} \alpha \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "\exists! k"] \arrow[dr, bend left, "\alpha"] \arrow[dd, bend right, "\alpha"'] & \\ P \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"] & A \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A \times B \end{tikzcd}$$

p. univ. pb.

$uk = \alpha$

$\Rightarrow \quad u = Eq(f, g)$

$\square$

A abeliana

m mono $\Leftrightarrow$ $\ker m = 0$

e epi $\Leftrightarrow$ $\operatorname{coker} e = 0$

<u>Dim</u>

$\Rightarrow$ ovvio

$\Leftarrow$ Supp che $\ker m = 0$

TS m è mono, cioè dati $mu = mv$ TS $u = v$

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[d, shift right, "u"'] \arrow[d, shift left, "v"] & \\ \bullet \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "w"'] & & X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "q"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "h"] & & Z \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Sia $q = \operatorname{coeq}(u,v)$ $\exists!\, \varphi$ $\varphi q = m$

q reg epi $\Rightarrow$ q epi $q = \operatorname{coker}(w)$
(A ex)

$qw = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi q w = m w = 0$

$\ker m = 0$ $\exists!\, h$ t.c. $0 h = w = 0$

$q = \operatorname{coker}(0)$ $\Rightarrow$ q è iso (EX)

[qui 0: freccia che fattorizza per l'oggetto 0

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$]

q è mono perché $\cancel{q}u = \cancel{q}v$

$\Rightarrow u = v$ $\square$

$\Rightarrow m$ mono

$\mathcal{A}$ abeliana

m è mono	e è epi
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\ker m = 0$	
$\Updownarrow$	
$\forall x \quad m x = 0 \Rightarrow x = 0$	
$\Updownarrow$	
$m = \ker(\mathrm{coker}(m))$	
DIM (EX)	

OSS f mono + epi $\Leftrightarrow f$ iso

$\Downarrow$

$\Rightarrow \quad f = \ker g$

$g f = 0 \Rightarrow g = 0$

$\Rightarrow f = \ker(0) \Rightarrow f$ iso

Proposizione

$\mathbb{A}$ abeliana $\Rightarrow$ $\mathbb{A}$ additiva

Dim

Additiva = preadditiva + 0 + prodotti binari

$$A \rightarrowtail{\Delta} A \times A \xrightarrow{q} Q$$

$q = \operatorname{coker} \Delta$

TS $Q \cong A$

in $\mathbf{Ab}$ $Q = A \times A / \Delta$

$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \Delta$

$\Leftrightarrow x - x' = y - y' \Leftrightarrow$

$x - y = x' - y'$

NOTA $(x, y) \sim (x - y, 0)$

$$\begin{array}{ccccc} A\times A & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{\varphi} & A \\ (x,y) & & [(x,y)] & & x-y \\ & & [(x-y,0)] & & \end{array}$$

φ è omo in Ab

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle 1,0\rangle"] \arrow[rr, bend left, "r"] & A\times A \arrow[r, "q"] & Q \arrow[r, "\varphi"] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{cccc} x & \langle x,0\rangle & [(x,0)] & x \end{array}$$

$$\varphi \cdot r = 1_A$$

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{r} & Q \\ [(x,y)] & \longrightarrow & (x-y) & & [(x-y,0)] \end{array}$$

$\varphi = r^{-1}$ $\quad r = \varphi^{-1}$

se A abeliano

$r := q\langle 1,0\rangle$

TS r iso $\Longleftrightarrow$ r mono + epi