

TC

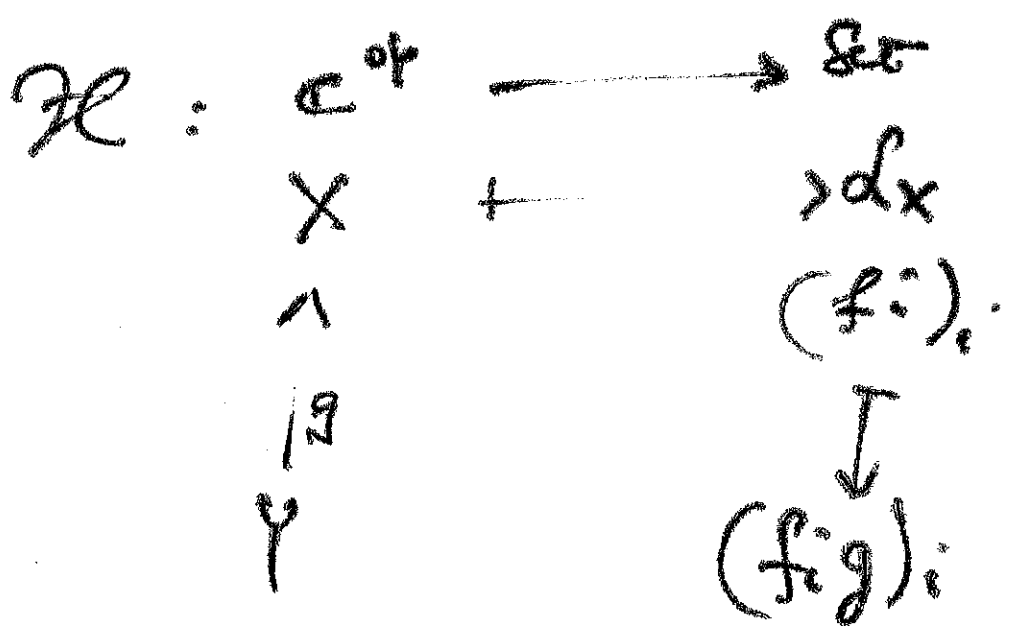
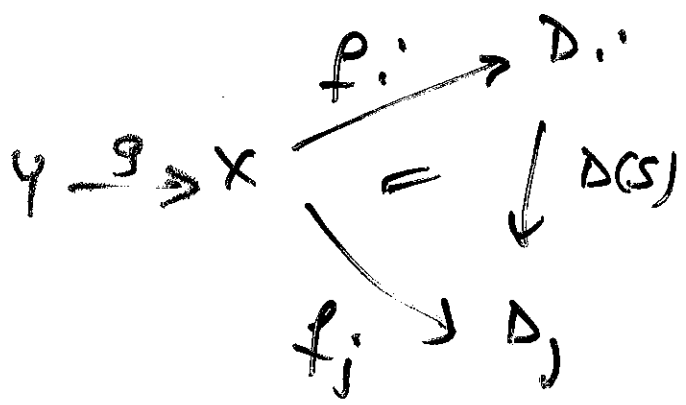
20 | 10 | 2015

$$\mathbb{D} : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}_X = \text{the class } (X, \mathbb{D} -) =$$

$$\left\{ (f_i) \in \prod_{i \in \text{ob } \mathbb{I}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \mathbb{D}_i) \right\}$$

$$\text{t.o. } \forall s: i \rightarrow j \quad \mathbb{D}s f_i = f_j$$



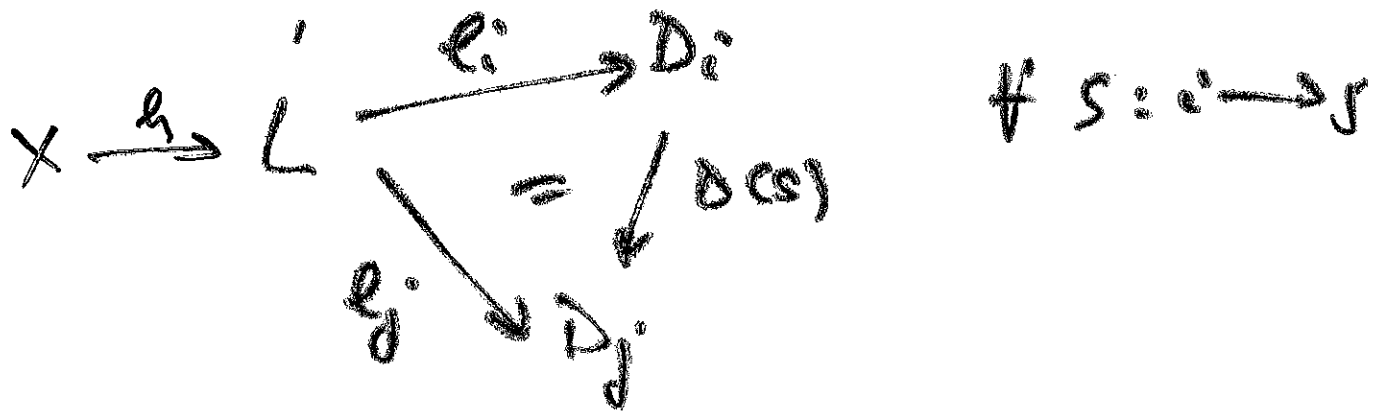
th  $\mathbb{C}$  has elements  $(L, \ell_i)$  on  $\mathbb{D}$

$\Leftrightarrow \mathcal{H}$  is represented by  $L$ ,

$$\text{and } \exists \eta : \mathcal{H} \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}, \text{ general}$$

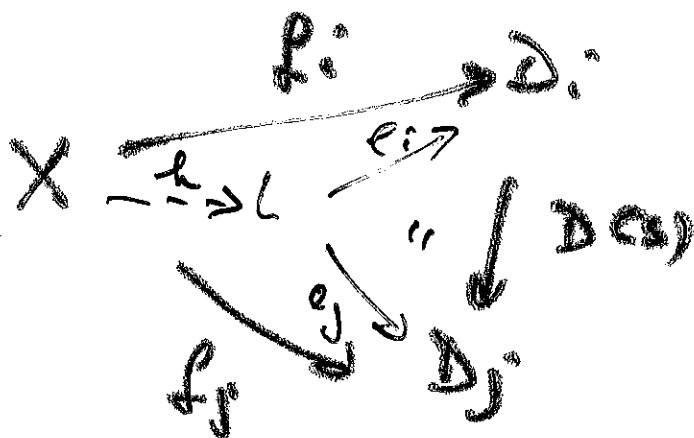
$$\forall X \in \mathbb{C} \quad \eta_X : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, L) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}(X) = \mathcal{L}_X$$

Def supponiamo che  $(L, \rho)$  sia un  $\mathcal{D}$ - $\mathcal{A}$ - $\mathcal{M}$  (2)



Definiamo  $\eta: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, L) \rightarrow \mathcal{D}_X$

è l'unico: dato  $(\rho_i) \in \mathcal{D}_X$



perché  $L$  è terminale  
tra i suoi  
sotto  $\mathcal{D}$ ,  $\exists!$

$$h \circ \rho_i \circ h = f_i$$

$$\text{cioè } \eta_X(h) = (\rho_i)$$

EX Dimo che tale  $\eta$  è naturale

viceversa, se dato  $\eta: \text{Hom}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{D}$

$$(L, \rho_i) \cdot \eta: \text{Hom}(L, L) \rightarrow \mathcal{D}(L)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} \\
 & & \downarrow \\
 & & \mathcal{D}^L \\
 & & (\rho_i)_{i \in I}
 \end{array}$$

$$(L_i) = \eta_L(\mathbb{1}_L) \in d_L^p \quad \text{e' l'una}$$

Corso per  $D$  di settore  $L$

EX Dimo che questo corso e' formale, c'è  $(L, L_i)$  e' l'unita' per  $D$  di  $\mathcal{D}$   $\square$

TEOREMA DUALE per i coefficienti  
senza x e mazio

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \quad G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$$

nel caso di equivalenza,

$$\eta: I_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cong} GF \quad \text{iso}$$

$$\zeta: I_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\cong} FG \quad \text{iso}$$

CASO + GENERALE

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \quad G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$F \dashv G \quad F \text{ aggiunto su } d' G \Leftrightarrow$$

$$(G \text{ " } d' s \text{ di } F) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (F, G)$  e' una coppia aggiunta  
se esistono

$$\eta : Id_E \longrightarrow GF \quad t.u.$$

$$\epsilon : FG \longrightarrow Id_D \quad t.u.$$

due leggi: due leggi: 2 sequenti  
 associati (IDENTITA' TRIANGOLARI)

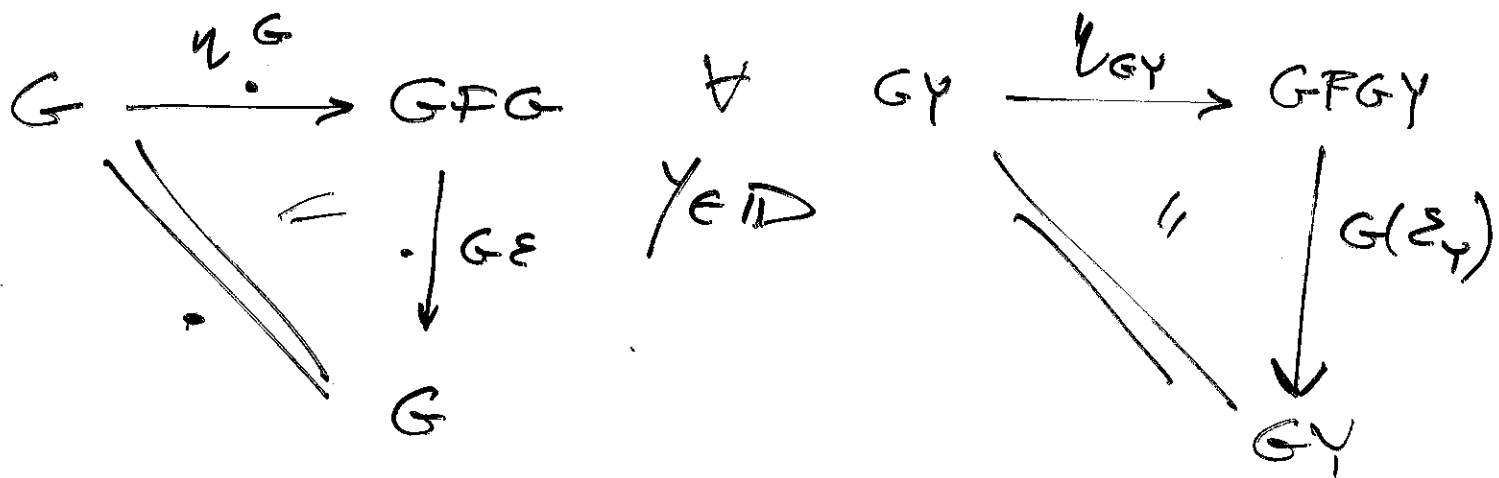
$$\begin{array}{ccc}
 F & \xrightarrow{F \cdot \eta} & FGF \quad \text{c.c.e.} \\
 \searrow & \cong & \downarrow \epsilon F \\
 & & F
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{F(\eta_x)} & FGFX \\
 \searrow & \cong & \downarrow \epsilon_{FX} \\
 & & FX
 \end{array}$$

$$\eta_x : X \longrightarrow GF X$$

$$FX \xrightarrow{F(\eta_x)} FGFX$$

$$FGFX \xrightarrow{\epsilon_{FX}} FX$$



## II DEFINIZIONE

$$F \dashv G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \quad \text{se } \forall X \in \text{ob } \mathcal{D} \quad \forall Y \in \text{ob } \mathcal{C}$$

erste universelle natürliche

$$\phi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

woe erste universelle natürliche

$$\Phi : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{\cong} & \text{Set} \\
 (X, Y) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \\
 \uparrow h & & \downarrow k \\
 (X', Y') & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', Y')
 \end{array}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-): \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \longrightarrow \text{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} (X, Y) & \longmapsto & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \\ h \uparrow & & \downarrow Gk(-)h \\ (X', Y') & \longmapsto & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GY') \end{array}$$

$\Phi$  è una f.n. da  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$  a  $\text{Set}$

$$\begin{array}{ccc} X & Y & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \xrightarrow[\cong]{\Phi_{X,Y}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \\ h \uparrow & \downarrow k & \downarrow Gk(-)h \quad \downarrow \text{GRAPH} \\ X' & Y' & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX', Y') \xrightarrow[\cong]{\Phi_{X',Y'}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', GY') \end{array}$$

dato  $g: FX \rightarrow Y$     se  $\bar{g} = \Phi_{X,Y}(g)$

$$\bar{g}: X \rightarrow GY$$

se  $f: X \rightarrow GY$

$$\bar{f} = \Phi_{X,Y}^{-1}(f)$$

$$\frac{FX \xrightarrow{g} Y}{X \xrightarrow{\bar{g}} GY} \quad \bar{f} = f$$

$$\frac{FX \xrightarrow{\bar{f}} Y}{X \xrightarrow{f} GY}$$

$$FX' \xrightarrow{Fh} FX \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{k} Y'$$

---


$$X' \xrightarrow{h} X \xrightarrow{\bar{g}} GY \xrightarrow{G(R)} GY'$$

$$G(R)\bar{g} \circ h = k \circ g \circ F(h)$$

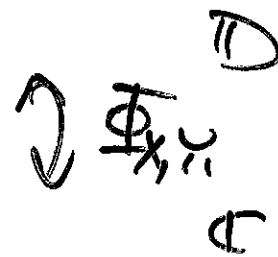
la naturalité de  $X \in \mathcal{C}Y$  & fait  
 Spence i 2 séparés (in modo  
 epimorfe) )  
 naturalité i  $Y$  (see  $g = h = 1$ )

$$\begin{array}{c} FX \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{k} Y' \\ \hline X \xrightarrow{\bar{g}} GY \xrightarrow{G(R)} GY' \end{array}$$

$$G(R)\bar{g} = k \circ g$$

naturalité de  $X$  ( $k = 1$ )

$$\begin{array}{c} FX' \xrightarrow{Fh} FX \xrightarrow{g} Y \\ \hline X' \xrightarrow{h} X \xrightarrow{\bar{g}} GY \end{array}$$





Dato  $X \xrightarrow{f} GY$ ,  $f$  sur  $g$  o  $g = f^{-1}$

quindi  $\exists \bar{f}: X \rightarrow GY$

$$FX' \xrightarrow{Fh} FX \xrightarrow{\bar{f}} GY$$

---


$$X' \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} GY$$

naturalità  
in  $X$

---


$$f \cdot h = \bar{f} \cdot Fh$$


---

EX Dimo che se  $F$  è un'equif  
con quasi inverso  $G$  allora

$$F \dashv G \quad \& \quad G \dashv F$$

(usando la II def)

ALLA RICERCA DI  $\eta$  (UNITA'  
dell'aggiunta)  $\eta: Id_D \rightarrow GF$

$\Sigma$  (COUNITA')  $\eta: FG \rightarrow Id_D$

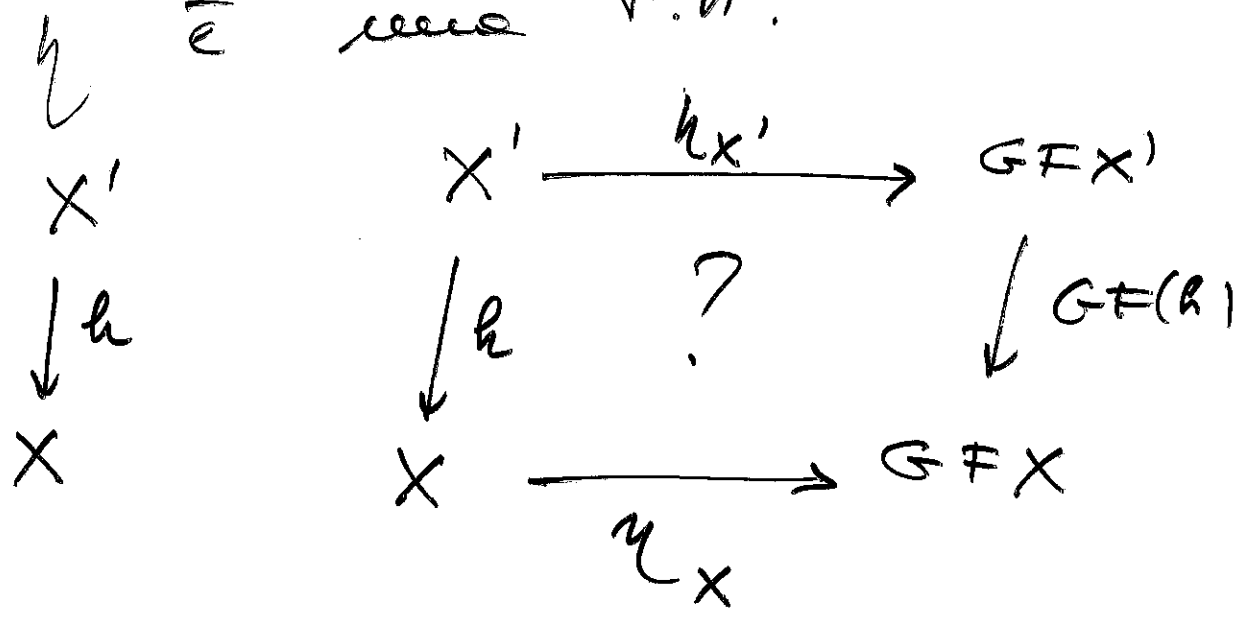
cominciamo con  $\eta$  e si vede  
 $\forall X \in \text{ob } \mathcal{C} \quad \eta_x: X \rightarrow G(FX)$

ma abbiamo  $\Phi_{X,Y}$

$$FX \xrightarrow{1_{FX}} FX$$

$$X \xrightarrow{\eta_X := 1_{FX}} GFX$$

$\bar{e}$  una t.n.



$$\frac{FX' \xrightarrow{1_{FX'}} FX' \xrightarrow{Fh} FX}{X' \xrightarrow{1_{FX'}} GFX' \xrightarrow{G(\bar{e})} GFX} = \frac{FX' \xrightarrow{Fh} FX \xrightarrow{1_{FX}} FX}{X' \xrightarrow{h} X \xrightarrow{\eta_X} GFX}$$

$\eta_{X'}$

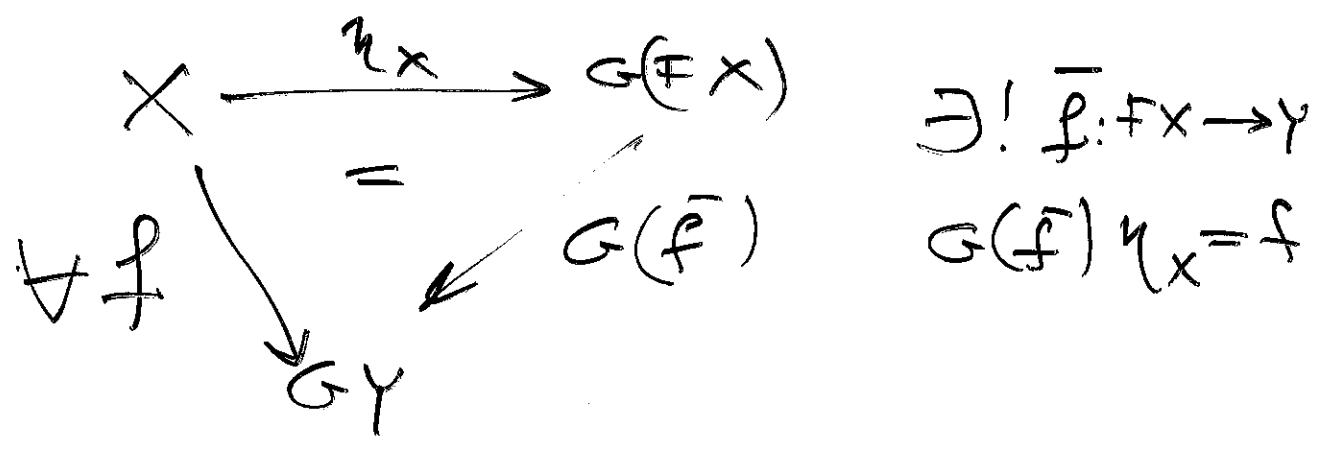
ricorda se c'è  $Fh$ ,  
sotto devo avere la stessa  
composizione!

$$G(\bar{e}) \cdot \eta_{X'} = \eta_X \circ h$$

# PROPRIETA' UNIVERSALE DELL'UNITA'

- $\forall X \quad \eta_X$  è una  $G$ -freccia  
 (cioè è una freccia che finisce in una immagine di  $G$ )

• • è universale rispetto a tutte le  $G$ -freccie che partono da  $X$ :



$$\forall X \xrightarrow{f} GY \quad = \quad X \xrightarrow{\eta_X} GX \xrightarrow{G\bar{f}} GY$$

$\eta_X = \bar{f}_{FX}$        $G\bar{f}$

Come prima  $f = G(\bar{f})\eta_X$

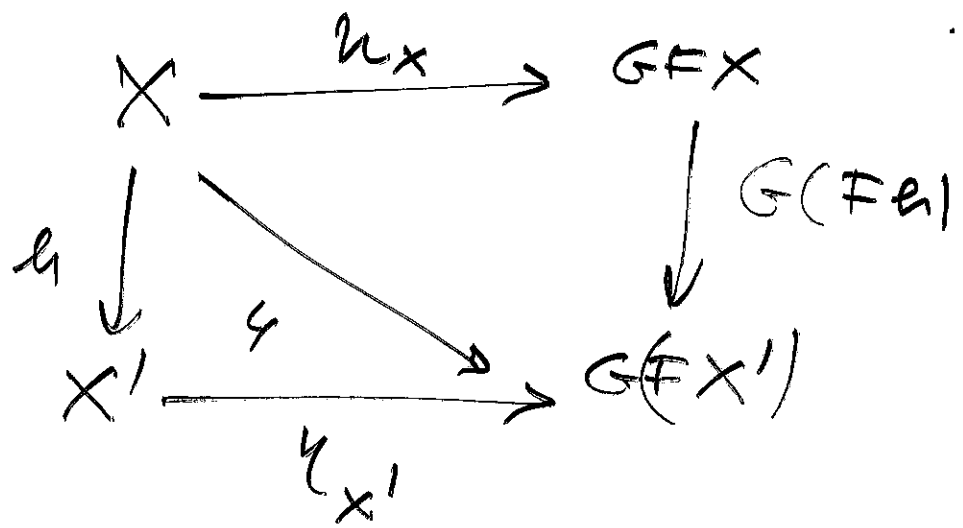
Df  $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  è un oggetto  
 ed è se  $\forall X \in \mathbb{C}$ , esiste una  
 $G$ -freccia univ. sola  $\eta_X: X \rightarrow G(Y_X)$

Dato  $G: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  aggiunto a  $S$ ,  
 ci costruiamo  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$   
 funzione che risulterà aggiunto su  
 a  $G$ ,  $F \dashv G$

$\forall x$  df  $Fx := \gamma x$

$\gamma_x: x \rightarrow G(\gamma x) = GFx$

da cui  $x \xrightarrow{h} x'$

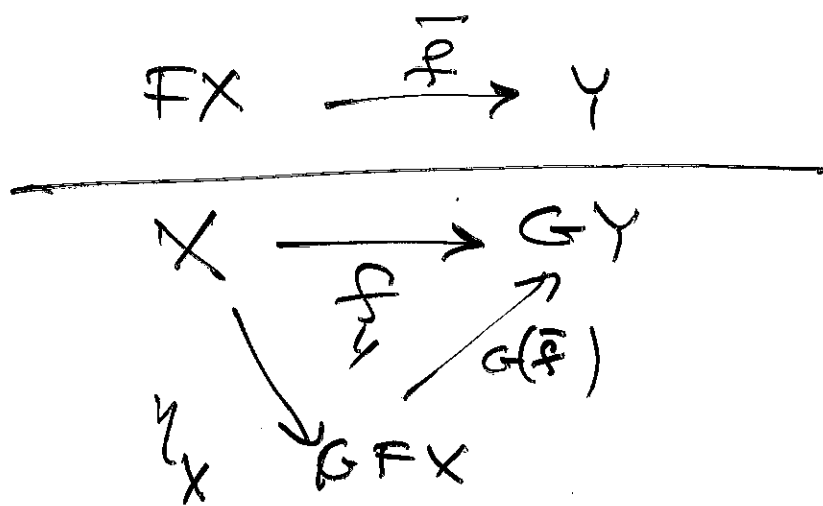


per l'universalità di  $\gamma_x$  tra le  $G$ -freccie  
 che escono da  $X$ ,  $\exists! Fh: FX \rightarrow FX'$

t.c.  $G(Fh) \cdot \gamma_x = \gamma_{x'}; h$

si presta ruolo definito  $F$  sulle  
 frecce e allora la naturalezza  
 di  $\gamma: Id_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot} GF$

TS  $F \dashv G$  (uso la  $\Pi$  def), cerco (12)  
 una nuova naturale  $\text{Hom}(F-, -)$   
 e  $\text{Hom}(-, G-)$



$\bar{f}$  è l'unica  
 peccata da  
 $FX \rightarrow Y$   
 corrispondente  
 a  $f$  nella prop.  
 universale di  $\eta_X$

ora abbiamo  $\bar{f}$  una funzione

$$(\bar{\phantom{f}}) : \text{Hom}(-, G-) \longrightarrow \text{Hom}(F-, -)$$

$(\bar{\phantom{f}})$  è una funzione

$$1) \quad \bar{f} = \bar{f'} \quad \eta_{X, Y} G(f) = \eta_{X, Y} G(f')$$

$$\Leftrightarrow f = f'$$

$(\bar{\phantom{f}})$  è iniettiva

2)  $(\bar{\phantom{f}})$  è anche suriettiva

$$g: FX \longrightarrow Y \quad G(g): GFX \longrightarrow GY$$

$$Df \quad f := G(g) \eta_X \Rightarrow g = \bar{f} \circ f \text{ per } \eta_X$$