TC

20|10|2015

$$D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}_X = \lim \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, D-) =$$

$$\Big\{ (f_i) \in \prod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, D_i) \Big\}$$

t.c. $\forall s : i \longrightarrow j \quad Ds\, f_i = f_j$

$$\begin{tikzcd} & & D_i \arrow[dd, "D(s)"] \\ Y \arrow[r, "g"] & X \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "="] & \\ & & D_j \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} : \mathbb{C}^{op} \arrow[rr] & & \mathrm{Set} \\ X \arrow[rr, mapsto] & & \mathcal{L}_X \\ & & (f_i)_i \arrow[d, mapsto] \\ Y \arrow[uu, "g"] & & (f_i g)_i \end{tikzcd}$$

Th $\mathbb{C}$ ha limite (L, ℓ_i) su D

$\iff$ $\mathcal{H}$ è rappresentato da L,

cioè $\exists\ \eta : H_L \xrightarrow[\cong]{\cdot} \mathcal{H}$, quindi

$\forall X \in \mathbb{C} \quad \eta_X : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, L) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}(X) = \mathcal{L}_X$

<u>Dim</u> supp che (L, ℓ_i) sia un limite di $\mathcal{C}$ su D

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & L \arrow[r, "\ell_i"] \arrow[dr, "\ell_j"'] & D_i \arrow[d, "D(s)"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & & D_j \end{tikzcd} \qquad \forall\, s : i \longrightarrow j$$

$\forall$ definiamo $\eta_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, L) \longrightarrow \mathcal{L}_X$

X $\qquad\qquad\qquad\qquad h \longmapsto (\ell_i h)$

è biettiva: dato $(f_i) \in \mathcal{L}_X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, bend left, "f_i"] \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[drr, bend right, "f_j"'] & L \arrow[r, "\ell_i"] \arrow[dr, "\ell_j"'] & D_i \arrow[d, "D(s)"] \arrow[dl, phantom, "''"] \\ & & D_j \end{tikzcd}$$

poiché L è terminale tra i coni su D, $\exists !$ h $\ell_i h = f_i$

cioè $\eta_X(h) = (f_i)$

<u>EX</u> Dim che tale η è naturale

Viceversa, se dato $\eta : H_L \overset{\cdot}{\underset{\cong}{\longrightarrow}} \mathcal{X}$

$(L, \ell_i ?)$. $\eta_L : \mathrm{Hom}(L, L) \longrightarrow \mathcal{X}(L)$

$$1_L \longmapsto \underset{(\ell_i)_{i \in I}}{\mathcal{L}_L}$$

$(l_i) = \eta_L(1_L) \in d_L$ è un cono su D di vertice L

<u>EX</u> Dim. che questo cono è terminale, cioè (L, l_i) è un limite su D di $\mathbb{C}$ $\square$

TEOREMA DUALE per i colimiti sviluppato x esercizio

$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ $\qquad$ $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$

nel caso di equivalenza,

$$\eta : I_{\mathbb{C}} \underset{\cong}{\overset{\cdot}{\longrightarrow}} GF \quad \text{iso}$$

$$\xi : I_{\mathbb{D}} \underset{\cong}{\overset{\cdot}{\longrightarrow}} FG \quad \text{iso}$$

<u>CASO + GENERALE</u>

$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ $\qquad$ $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$

$F \dashv G$ $\quad$ F aggiunto sin di G $\Leftrightarrow$

(G " ds di F) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (F, G) è una coppia aggiunta

se esistono

$\eta : Id_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot} GF$ t.n.

$\varepsilon : FG \xrightarrow{\cdot} Id_{\mathbb{D}}$ t.n.

tali che valgano i 2 seguenti affioe' (IDENTITA' TRIANGOLARI)

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\cdot\eta"] \arrow[dr, equal, "\cdot"', "="] & FGF \arrow[d, "\varepsilon\cdot F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

cioè $\forall X \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F(\eta_X)"] \arrow[dr, equal, "="] & FGFX \arrow[d, "\varepsilon_{FX}"] \\ & FX \end{tikzcd}$$

$\eta_X : X \longrightarrow GFX$

$FX \xrightarrow{F(\eta_X)} FGFX$

$FGFX \xrightarrow{\varepsilon_{FX}} FX$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta^G \cdot"] \arrow[dr, equal, "="'] & GFG \arrow[d, "\cdot\, G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \forall\, Y \in \mathbb{D} \qquad \begin{tikzcd} GY \arrow[r, "\eta_{GY}"] \arrow[dr, equal, "\shortparallel"] & GFGY \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \\ & GY \end{tikzcd}$$

II DEFINIZIONE

$F \dashv G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ se $\forall\, X \in \text{ob}\,\mathbb{C}$ $\forall\, Y \in \text{ob}\,\mathbb{D}$

esiste una biezione naturale

$$\phi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathbb{D}}(FX, Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X, GY),$$

cioè esiste una iso naturale

$$\Phi : \text{Hom}_{\mathbb{D}}(F-, -) \xrightarrow{\cdot} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, G-)$$

$$\text{Hom}_{\mathbb{D}}(F-,-) : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{D} \longrightarrow \text{Set}$$

$$\begin{tikzcd} (X, Y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "k"] & \text{Hom}_{\mathbb{D}}(FX, Y) \arrow[d, "k(-)Fh"'] \\ (X', Y') \arrow[u, "h"] \arrow[r] & \text{Hom}_{\mathbb{D}}(FX', Y') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-, G-) : \mathbb{C}^{op} \times \mathbb{D} \arrow[rr] & & \mathrm{Set} \\
(X, Y) \arrow[rr, mapsto] & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, GY) \arrow[d, "Gk(-)h"'] \\
(X', Y') \arrow[u, "h", "k"'] \arrow[rr, mapsto] & & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X', GY'
\end{tikzcd}$$

Φ è una t.n. sia in X che in Y

$$\begin{tikzcd}
X & Y \arrow[d, "k"] \\
X' \arrow[u, "h"] & Y'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(FX, Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}", "\cong"'] \arrow[d, "k(-)Fh"'] \arrow[d, shift left=3, "g"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, GY) \arrow[d, "G(k)(-)h"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(FX', Y') \arrow[r, "\cong", "\Phi_{X',Y'}"'] \arrow[r, shift left=3] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X', GY')
\end{tikzcd}$$

dato $g : FX \longrightarrow Y$ sia $\bar{g} = \phi_{X,Y}(g)$

$\bar{g} : X \longrightarrow GY$

se $f : X \longrightarrow GY$ $\quad \bar{f} = \phi^{-1}_{X,Y}(f)$

$$\frac{FX \xrightarrow{g} Y}{X \xrightarrow{\bar{g}} GY} \qquad \frac{FX \xrightarrow{\bar{f}} Y}{X \xrightarrow[f]{} GY}$$

$\bar{\bar{f}} = f$

$$\begin{array}{c} FX' \xrightarrow{Fh} FX \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{k} Y' \\ \hline X' \xrightarrow{h} \cancel{X} \xrightarrow[\bar{g}]{} GY \xrightarrow[G(k)]{} GY' \end{array}$$

$$G(k)\,\bar{g}\,h = \overline{k \cdot g \cdot F(h)}$$

la naturalità in X e in Y si può spezzare in 2 séparate (in modo equivalente)

naturalità in Y (scelgo $h = 1$)

$$\begin{array}{c} FX \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{k} Y' \\ \hline X \xrightarrow[\bar{g}]{} GY \xrightarrow[Gk]{} GY' \end{array}$$

$$G(k)\,\bar{g} = \overline{k g}$$

naturalità in X ($k = 1$)

$$\begin{array}{c} FX' \xrightarrow{Fh} FX \xrightarrow{g} Y \\ \hline X' \xrightarrow[h]{} X \xrightarrow[\bar{g}]{} GY \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{D} \\ \updownarrow \Phi_{X,Y} \\ \mathbb{C} \end{array}$$

Dato $X \xrightarrow[f]{} GY$, f sarà $\bar{g}$ di $g = \bar{f}$

quindi $\forall\, \delta : X \longrightarrow GY$

$$\frac{FX' \xrightarrow{Fh} FX \xrightarrow{\bar{f}} Y}{X' \xrightarrow[h]{} X \xrightarrow[f]{} GY}$$

naturalità in X

$$\overline{f \cdot h} = \bar{f}\; Fh$$

EX Dim. che se F è un'equiv con quasi inverso G allora

$F \dashv G$ & $G \dashv F$

(usando la II def)

ALLA RICERCA DI η (UNITÀ dell'aggiunzione) $\eta : Id_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cdot} GF$

ε (COUNITÀ) : $FG \xrightarrow{\cdot} Id_{\mathbb{D}}$

cominciamo con η. ci serve

$\forall\, X \in ob\, \mathcal{C}$ $\quad \eta_X : X \longrightarrow G(FX)$

ma abbiamo $\Phi_{X,Y}$

$$\frac{FX \xrightarrow{1_{FX}} FX}{X \longrightarrow GFX}$$

$$\eta_X := \overline{1_{FX}}$$

η è una t.n.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "h"] \\ X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\eta_{X'}"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "?"] & GFX' \arrow[d, "GF(h)"] \\ X \arrow[r, "\eta_X"'] & GFX \end{tikzcd}$$

$$\frac{FX' \xrightarrow{1_{FX'}} FX' \xrightarrow{Fh} FX}{X' \xrightarrow[\overline{1_{FX'}}]{} GFX' \xrightarrow[G(Fh)]{}} = \frac{FX' \xrightarrow{Fh} FX \xrightarrow{\overset{\overline{\eta_X}}{\overset{=}{1_{FX}}}} FX}{X' \xrightarrow[h]{} X \xrightarrow[\eta_X]{} GFX}$$

$$\overline{1_{FX'}} = \eta_{X'}$$

Siccome su c'è Fh, sotto devo avere la stessa corrispondenza!

$$GF(h)\cdot\eta_{X'} = \eta_X \cdot h$$

PROPRIETA' UNIVERSALE DELL'UNITA'

- $\forall X$ η_X è una G-freccia (cioè è una freccia che finisce in una immagine di G)

- - è universale rispetto a tutte le G-frecce che partono da X:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\forall f"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "="] & G(FX) \arrow[d, "G(\bar{f})"] \\ & GY \end{tikzcd}$$

$\exists!\ \bar{f} : FX \to Y$

$G(\bar{f})\,\eta_X = f$

$$\frac{FX \xrightarrow{\bar{f}} Y}{\forall\ X \xrightarrow[f]{} GY} = \frac{FX \xrightarrow{1_{FX}} FX \xrightarrow{\bar{f}} Y}{X \xrightarrow[\eta_X = \bar{1}_{FX}]{} GFX \xrightarrow[G\bar{f}]{} GY}$$

come prima $f = G(\bar{f})\,\eta_X$

Df $G : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ è un aggiunto dx se $\forall X \in \mathbb{C}$, esiste una G-freccia universale $\eta_X : X \longrightarrow G(Y_X)$

Dato $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ aggiunto ds, ci costruiamo $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ funtore che risulterà aggiunto sx a G, $F \dashv G$

$\forall X$ df $FX := Y_X$

$\eta_X : X \to G(Y_X) = GFX$

sia ora $X \xrightarrow{h} X'$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\eta"] & GFX \arrow[d, "G(Fh)"] \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & G(FX')
\end{tikzcd}$$

per l'universalità di η_X tra le G-frecce che escono da X, $\exists!\ Fh : FX \to FX'$ t.c. $G(Fh) \cdot \eta_X = \eta_{X'} \cdot h$

in questo modo definisco F sulle frecce e ottengo la naturalità di $\eta : Id_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot} GF$

TS $F \dashv G$ (uso la II df), cerco una biezione naturale $\mathrm{Hom}(F-,-)$ e $\mathrm{Hom}(-,G-)$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\bar f"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & GY \\ GFX \arrow[ur, "G(\bar f)"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar f$ è l'unica freccia da $FX \longrightarrow Y$ corrispondente a f nella prop. universale di η_X

Così abbiamo df una funzione

$$\overline{(\;)} : \mathrm{Hom}(-, G-) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F-,-)$$

$\overline{(\;)}$ è una biezione

1) $\bar f = \bar f'$ $\quad \eta_X G(\bar f) = \eta_X G(\bar f')$

$\quad f = f'$

$\overline{(\;)}$ è iniettiva

2) $\overline{(\;)}$ è anche suriettiva

$g : FX \longrightarrow Y$ $\quad G(g) : GFX \longrightarrow GY$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[rr, bend right] & GFX \arrow[r] & GY \end{tikzcd}$$

Df $f := G(g)\eta_X \Rightarrow g = \bar f$ per df di $\bar f$