TC

20/11/15

EX $\mathcal{C}$ cat con class. di sottoggetti (con limiti finiti)

$\forall X \in \mathcal{C}$, la categoria

$\mathcal{C}/X$ ha classificatori di sottoggetti

Set Set fin

$$\underset{\bullet}{0} \longrightarrow \underset{\bullet}{1}$$

Set

gli oggetti sono identificabili

$X_0 \xrightarrow{\sigma} X_1$ e le frecce

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
Y_0 \arrow[r, "\sigma'"'] & Y_1
\end{tikzcd}$$

$S \in \mathrm{Sub}(X)$

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "="] & S_1 \arrow[d, hook] \\ X_0 \arrow[r, "\sigma"'] & X_1 \end{tikzcd}$$

$x \in S_0$ $\qquad \chi_S(x) = 1$

$x \notin S_0$, $\sigma(x) \in S_1$ $\qquad \chi_S(x) = 1/2$

$x \notin S_0$, $\sigma(x) \notin S_1$ $\qquad \chi_S(x) = 0$

ainsi Ω : $\Omega_0 \xrightarrow{\omega} \Omega_1$

$\Omega_0 = \{0, 1/2, 1\}$ $\qquad \omega(0) = 0$

$\omega(1/2) = \omega(1) = 1$

$\Omega_1 = \{0, 1\}$

$$\begin{tikzcd} 1 : \{*\} \arrow[r] \arrow[d, "t_0"'] & \{*\} \arrow[d, "t_1"] \\ \Omega_0 \arrow[r, "\omega"'] & \Omega_1 \end{tikzcd}$$

$t_0(*) = t_1(*) = 1$

Chi è χ_S?

$$\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\sigma"'] & X_0 \arrow[r, "(\chi_S)_0"] \arrow[d, "\sigma"'] & \Omega_0 \arrow[d, "\omega"] \\
S_1 \arrow[r, hook] & X_1 \arrow[r, "(\chi_S)_1"'] & \Omega_1
\end{tikzcd}$$

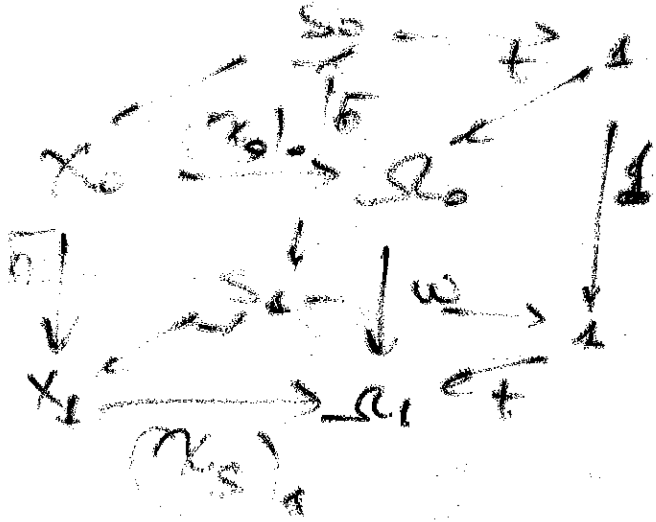
$(\chi_S)_0(x) = 1 \iff x \in S_0$

$= 0 \iff \sigma(x) \notin S_1$

$\frac{1}{2} \iff x \notin S_0,\ \sigma(x) \in S_1$

$(\chi_S)_1$ = solita funz. caratt. di S_1

χ_{S_1}



$\Rightarrow 1 \xrightarrow{t} \Omega_0 \xrightarrow{\omega} \Omega_1$ è un classificatore di sottoggetti

$S_0 = \{\ \}$ giocati in 1° fase

$S_1 = S_0 \cup ?$

$S_0 \hookrightarrow S_1$

$S : \mathbb{N} \longrightarrow Set$

$0 \mapsto S_0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \mapsto S_1$

insieme di funtori della dinamica il cui caso è un insieme variabile!

$\underline{\Omega}^{op}$

~~Set~~

CLASSIFICATORE

$X \in \underline{\Omega}^{op} \iff X$ Ω-set dx

$S \in Sub(X)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[d, "(\ )\cdot m"] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "(\ )\cdot m"] \\ S \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

sottoinsieme

$\iff$ S è chiuso rispetto all'azione di Ω su X, cioè se $x \in S$, $m \in \Omega$, $x \cdot m \in S$

---

metto l'azione banale di Ω

$1 \xrightarrow{t} 2 = \{0,1\}$

funziona anche per $\underline{Set}^{\underline{\Omega}^{op}}$?

$0 \cdot m = 0$

$1 \cdot m = 1$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "\chi_S"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

χ_S è equivariante rispetto all'azione di M ?

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 1 \\ \Updownarrow \\ x\cdot m \in S}}{\chi_S(x\cdot m)} = \chi_S(x)\cdot m = \underset{\substack{\shortparallel \\ 1 \\ \Updownarrow \\ x \in S}}{\chi_S(x)}$$

$$x\cdot m \in S \overset{?}{\Longleftrightarrow} x \in S$$

$\Leftarrow$ sì

$\Rightarrow$?

se M è un gruppo, sì

$$x\cdot m \in S \Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ x}}{(x\cdot m)\cdot m^{-1}} \in S$$

Se M è solo monoide,

dobbiamo scoprire come deve essere Ω_M, eventuale classificatore

$$\Omega_M : \underline{M}^{op} \longrightarrow Set$$

$$\Omega_M(*) \overset{Y}{\cong} Hom_{Set^{M^{op}}}(H_*, \Omega_M) \cong$$

$$Hom_{M\text{-}set}(M, \Omega_M) \underset{\substack{\Omega_M \\ \text{classificatore}}}{\cong} Sub(M)$$

$$\Omega_M = \{L \subseteq M \mid \forall m \in M \ \forall l \in L \ \ lm \in L\} = \{L \subseteq M \mid \text{ideali dx di } M\}$$

azione dx su Ω_M

$$\forall \ (L \cdot m) = \{x \in M \mid mx \in L\}$$

$L \in \Omega_M$ $\underline{\underline{EX}}$ (1) $L \circ m \in \Omega_M$

(2) è un'azione dx

$t : 1 = \{*\} \longrightarrow \Omega_M$

$t(*) = M \in \Omega_M$

(max ideale dx)

$S \hookrightarrow X \in \underline{M\text{-sets}}$

S è chiuso rispetto all'azione di M

$\chi_S : X \longrightarrow \Omega_M$

$\chi_S(x) = \{ m \in M \mid x \cdot m \in S \}$

$\underline{\text{tx}}$ · $\chi_S(x) \in \Omega_M$

· χ_S è equivariante

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] \arrow[dr, phantom, "1"] & 1 \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "\chi_S"'] & \Omega_M
\end{tikzcd}$$

$x \in S \implies \chi_S(x) = M$

$\Longleftarrow \quad x \cdot m \in S \ \forall m$

$x \in S \quad m = 1$

cioè ① è un p.b.

NOTA $\quad \Gamma$ = gruppo

$$\Omega_\Gamma = \{\Gamma, \phi\} \cong 2$$

$$Set^{\mathbb{C}^{op}} \qquad \mathbb{C} \text{ piccola}$$

Cerco Ω classificatore

$$\Omega : \mathbb{C}^{op} \longrightarrow Set$$

$$\forall_C \quad \Omega(C) \cong Hom_{Set^{\mathbb{C}^{op}}}(H_C, \Omega) \cong$$

$$Sub(H_C)$$

Fissiamo $C \in ob\,\mathbb{C}$

$$S \rightarrowtail H_C \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall_A \quad S(A) \rightarrowtail H_C(A) = Hom(A, C)$$

mi scelgo come rappr. un sottoinsieme

$$S(A) \hookrightarrow Hom(A, C)$$

naturalità

$$\begin{tikzcd} A & S(A) \arrow[r, hook] \arrow[d, "S(h)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathrm{Hom}(A,C) \arrow[d, "(-)\cdot h"] \\ A' \arrow[u, "h"] & S(A') \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}(A',C) \end{tikzcd}$$

$S(h) = (-)\cdot h$

$f \in S(A)$, h è comp con f

$\Rightarrow fh \in S(A')$

Allora S è descrivibile come un

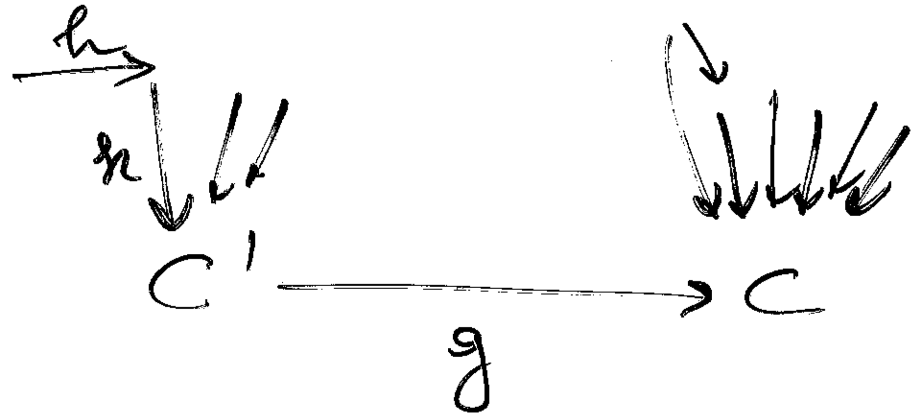
CRIVELLO su C (sieve):

$S \subseteq \{ f \in \mathrm{Arr}(\mathbb{C}) : \mathrm{cod}(f) = C \}$

t.c. che se $f : A \to C$ $f \in S$

$A' \xrightarrow{h} A$, anche $fh \in S$

$$\Omega(C) = \{ S \mid S \text{ crivello su } C \} \cong \mathrm{Sub}(H_C)$$



$$\Omega(g) : \Omega(C) \longrightarrow \Omega(C')$$

$$S \longmapsto \Omega(g)(S) = \{k : \operatorname{cod}(k) = C' \text{ e } gk \in S\}$$

$$\| \\ g^*(S)$$

è un crivello su C'

e così Ω è un funtore

$$\Omega : \mathbb{C}^{op} \longrightarrow Set$$

$$t : 1 \longrightarrow \Omega \ ?$$

$$\forall_C \quad t_C : \{*\} \longrightarrow \{f \mid \operatorname{cod} f = C\}$$

crivello max su C

$\forall \; Q \rightarrowtail P$ Q rappresenta un sottoggetto di P

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & 1 \arrow[d, "t"] \\ P \arrow[r, "\chi^Q"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

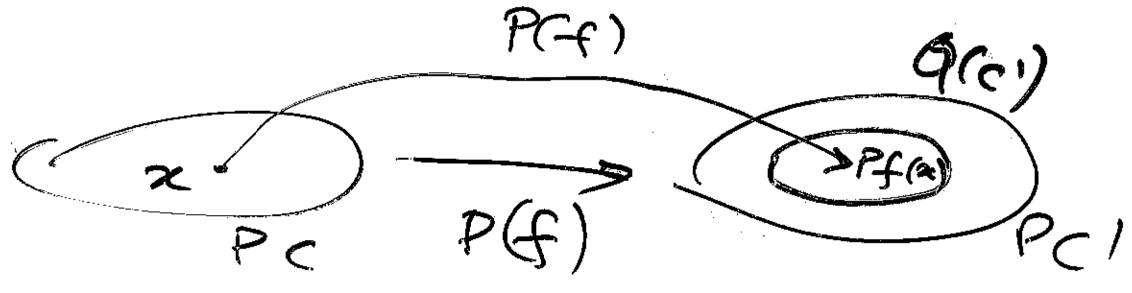
Devo determinare $\chi_C^Q : PC \longrightarrow \Omega C$

in modo che

$$\begin{tikzcd} QC \arrow[r] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & 1C \arrow[d, "t_C"] \\ PC \arrow[r, "\chi_C^Q"'] & \Omega C \end{tikzcd}$$

$$\chi_C^Q(x) = \{ f \mid cod(f) = C \text{ t.c. } (Pf)(x) \in Q(dom\, f) \}$$

$$\begin{tikzcd} C & PC \arrow[d, "Pf"] \\ C' \arrow[u, "f"] & PC' \end{tikzcd}$$



Ex $\chi_c^{Q}(x)$ è un crivello su C

$\chi_c^{Q}(x) = t_c(*) =$ max crivello su C

$\iff$ $P(1_c)(x) \in Q$ (dove t_c)

$\cup$

$x \in Q(C)$

$\iff$ (1) è un pull back

$\Rightarrow$ $1 \xrightarrow{t} \Omega$ è un

classificatore di sottoggetti $\square$

Df Una categoria $\mathcal{C}$ è un topos elementare se

(1) ha limiti finiti

(2) è cartesiana chiusa

(3) ha classificatore di sottoggetti

Ex $Set^{C^{op}}$, Set_{fin}