G1

27/10/15

$J : \underline{Ab} \hookrightarrow \underline{Grp} \qquad R \dashv J$

$R : \underline{Grp} \longrightarrow Ab$

$G \longmapsto G/[G,G]$

$G \qquad \eta_G : G \longrightarrow JRG = G/[G,G]$

Counità?

$\forall A \in \underline{Ab} \quad \varepsilon_A : RJA \longrightarrow A$

$A,$

$$\begin{tikzcd}
JA \arrow[rr, "\eta_{JA} = \text{iso}"] \arrow[dr, "1_{JA}"'] & & JRJA = \frac{A}{[A,A]=1} \cong A \arrow[dl, "J(\varepsilon_A)"] \\
& JA &
\end{tikzcd}$$

$\exists ! \ \varepsilon_A : RJA \longrightarrow A$ t.c.

$J(\varepsilon_A) \cdot \underset{\text{iso}}{\eta_{JA}} = \underset{\text{iso}}{1_{JA}}$

$\Rightarrow J(\varepsilon_A)$ iso $\Longrightarrow \varepsilon_A$ iso, $J$ riflette iso

Teorema $F \dashv G$

$G$ pieno e fedele $\iff$ counità iso naturale

$F$ " " $\iff$ unità " "

<u>Dim</u> $G$ pieno e fedele $\Rightarrow$

IS $\forall Y \quad \varepsilon_Y : FGY \longrightarrow Y$ è iso

$$\forall Y \quad \begin{tikzcd} GY \arrow[rr, "\eta_{GY} = G(\alpha)"] \arrow[drr, equal] & & GFGY \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \arrow[dl, phantom, "="] \\ & & GY \end{tikzcd} \qquad \mathrm{I} \text{ id. tr.}$$

$G$ pieno e fedele : $\exists!\ \alpha : Y \longrightarrow FGY$

t.c. $\eta_{GY} = G(\alpha)$

$$G(\varepsilon_Y \cdot \alpha) = G(\varepsilon_Y) \cdot G(\alpha) = 1_{GY} = G(1_Y)$$

$$\overset{\text{fedele}}{\Longrightarrow} \varepsilon_Y \cdot \alpha = 1_Y$$

$\alpha \cdot \varepsilon_Y$ ?

$$\begin{tikzcd}
GY \arrow[r, "\eta_{GY}"] \arrow[dr, equal] \arrow[ddr, "\eta_{GY}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "="] & GFGY \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \arrow[dd, bend left=60, "G(\alpha\varepsilon_Y)"] \\
 & GY \arrow[d, "\eta_{GY} = G(\alpha)"] \arrow[l, phantom, shift right=2, "="] \\
 & GFGY
\end{tikzcd}$$

$$\left(G(1_{FGY}) = 1_{GFGY}\right) \cdot \eta_{GY} = \eta_{GY}$$

$$G(\alpha\,\varepsilon_Y) \cdot \eta_{GY} = \eta_{GY}$$

$\Rightarrow$

per l'unicità della pr. universale di $\eta$

$$\Rightarrow \quad 1_{FGY} = \alpha\,\varepsilon_Y$$

$\Rightarrow$ $\varepsilon_Y$ è un iso

Viceversa, supp che $\forall_Y$ $\varepsilon_Y$ sia iso

TS $G$ sia pieno e fedele, cioè

data $h: GY \longrightarrow GY'$, $\exists!\, k: Y \to Y'$

con $G(k) = h$

$$\begin{array}{c}\overbrace{FGY \xrightarrow{\varepsilon_Y} Y \xrightarrow{\varepsilon_Y^{-1}} FGY \xrightarrow{\bar{h}} Y'}^{k} \\ \hline GY \xrightarrow[=1_{GY}]{\bar{\varepsilon}_Y} GY \xrightarrow{h} GY'\end{array}$$

$k\,\varepsilon_Y = \bar{h}$

$\overline{k\,\varepsilon_Y} = \bar{\bar{h}} = h$

$$\overline{k\,\varepsilon_Y} = G(k)\,\bar{\varepsilon}_Y = G(k)\cdot 1 \text{ quindi che}$$

$$h = G(k)$$

$G$ è pieno e fedele

<u>EX</u> $F$ pieno fedele $\Leftrightarrow \eta$ è iso nat.

$\square$

Teorema

$$\mathbb{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}$$

Sono equivalenti

(1) $F \dashv G$ $\eta, \varepsilon$ unità e counità sono iso

(questa si chiama un'equivalenza aggiunta) $F, G$ sono equivalenze una quasi inversa dell'altra

(2) $F \dashv G$ sia $F$ che $G$ piene e fedeli

(3) $F$, $G$ sono equivalenze con $G$ e $F$ quasi inversi uno dell'altro, cioè $\exists\ \eta : Id_C \xrightarrow{\cdot} GF$ e $\xi : FG \xrightarrow{\cdot} Id_D$ iso naturali

Dim (1) $\Leftrightarrow$ (2) per il teor precedente

(1) $\Rightarrow$ (3) ovvio

(3) $\Rightarrow$ (1)

Parto da $\eta : Id_C \xrightarrow{\cdot} GF$ dato e lo uso come unità per un'aggiunzione $F \dashv G$, se dimostro la propr universale dell'unità

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[dr, "\forall f"'] & & GFX \arrow[ll, dashed, bend right, "\eta_X^{-1}"'] \arrow[dl, "G(\bar{f})"] \\
& GY &
\end{tikzcd}
$$

ts $\exists!\ \bar{f} : FX \to Y$ t.c. $G(\bar{f})\eta_X = f$

Dato $f\,\eta_X^{-1} : GFX \longrightarrow GY$

G pieno fedele $\Longrightarrow \exists!\ \bar{f} : FX \to GY$

t.c. $G(\bar{f}) = f \cdot \eta_X^{-1}$

$$\Updownarrow$$

$$G(\bar{f}) \cdot \eta_X = f$$

$\Longrightarrow F \dashv G$. Ora $\eta$ determina la "sua" counità $\varepsilon$ che (di solito) $\neq \xi$ data nella definizione di equivalenza

$(F, G, \eta, \xi)$ dualf. in equiv

$\swarrow$ $\searrow$

$\varepsilon'$ sua counità

$\eta'$ sua unità ancora iso

$F \dashv G$ con $\eta, \varepsilon$ unità e counità iso nat. $\square$

~~Cor~~ Corollario

in ① ② [③] si ha anche $G \dashv F$

GLI AGGIUNTI SI COMPONGONO

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{D} \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{E} \arrow[l, bend left, "G'"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{matrix} F \dashv G \\ F' \dashv G' \end{matrix} \xRightarrow{EX} F'F \dashv GG'$$

COMPORTAMENTO DEGLI AGGIUNTI RISPETTO A LIM e COLIMITI

$F \dashv G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ G preserva i limiti che esistono in $\mathbb{D}$
e F " " colimiti " " " in $\mathbb{C}$

cioè se $D : \mathbb{I} \to \mathbb{D}$ è un diagramma con limite $(L, \ell_i)$ in $\mathbb{D}$, allora $(G(L), G(\ell_i))$ è un limite in $\mathbb{C}$

$G \cdot D : \mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathbb{D} \xrightarrow{G} \mathbb{C}$

Dim Sia $(L, l_i)$ cono ~~terminale~~ Terminale
cioè limite di $D$ in $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & D_i \arrow[d, "D(s)"] \arrow[dl, phantom, "//"] \\ & D_j \end{tikzcd} \qquad \forall s : i \to j$$

$\Downarrow$

$$\begin{tikzcd} G(L) \arrow[r, "G(l_i)"] \arrow[dr, "G(l_j)"'] & G(D_i) \arrow[d, "GD(s)"] \arrow[dl, phantom, "//"] \\ & G(D_j) \end{tikzcd}$$

è ancora un cono su $GD$

Dobbiamo dire che è terminale.

$\forall \; C \xrightarrow[g_i]{} GD_i$ cono su $GD$

$$\exists ! \quad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \arrow[d, phantom, "="] & GD_i \\ & G(L) \arrow[ur, "G(l_i)"'] & \end{tikzcd}$$

$\Longleftrightarrow \; \exists ! \; \bar{\varphi} : FC \longrightarrow L$ t.c.

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "\bar\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\bar g_i"] & L \arrow[r, "l_i"] & D_i \end{tikzcd}$$

---

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[rr, bend right, "g_i"'] & GL \arrow[r, "G(l_i)"'] & GD_i \end{tikzcd}$$

Dati $g_i : C \longrightarrow GD_i$ per aggiunzione

$\exists!\ \bar g_i : FC \longrightarrow D_i$ come su $D$

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[rr, "\bar g_i"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\,\bar\varphi"'] & & D_i \\ & L \arrow[ur, "l_i"'] \arrow[u, phantom, "="] & \end{tikzcd}$$

$(L, l_i)$ è terminale

$\Rightarrow$ $(GL, G(l_i))$ è un limite su $GD_i$ in $C$ $\square$

<u>EX</u> Provare la corrispondente proprietà per $F$ u.v.t. ~~colimiti~~ colimiti.

$G : \mathbb{D} \longrightarrow \underline{Set}$ qualunque

$\forall\, Y \in ob\, \mathbb{D}$

$$GY \xrightarrow{\eta_Y} \underset{Set}{Hom}(\{*\}, GY)$$

$$y \longmapsto f_y \text{ t.c. } f_y(*) = y$$

è una biezione naturale

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "h"] & GY \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[d, "Gh"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Hom(\{*\}, GY) \arrow[d, "G(h)\cdot -"] \\
Y' & GY' \arrow[r, "\eta_{Y'}"'] & Hom(\{*\}, GY')
\end{tikzcd}$$

$$G \underset{\substack{\text{naturalmente} \\ \text{iso}}}{\cong} Hom(\{*\}, G-)$$

Se $G$ ha aggiunto sin. $F$,

$$Hom(\{*\}, G-) \cong Hom_{\mathbb{D}}(F(\{*\}), -)$$

$$\cong$$

$$G$$

$G$ è rappresentabile e rappresentato da $F(\{*\}) = A$

Ma $I$ in Set è dato da

$$\begin{array}{c} I \cong \coprod_{i\in I} \{*\}_i \\ \| \\ \coprod_{i\in I} \{i\} \end{array}$$

$$F(I) = F\Big(\coprod_{i\in I} \{*\}_i\Big) = \coprod_{i\in I} \underset{\substack{\| \\ A}}{(F\{*\})_i}$$

$F$ è determinato da $F\{*\}$ e dalle sue copotenze

Ora se $G : \mathbb{D} \longrightarrow Set$ è rappresentabile, $G \cong Hom_{\mathbb{D}}(A,-)$ e in $\mathbb{D}$ esistono tutte le copotenze di $A$ $\coprod_{i\in I} (A)_i$

$\Rightarrow$ $G$ è un aggiunto dx

Dim Def $F : \underline{Set} \longrightarrow \mathbb{D}$ come $F(I) = \coprod_{i\in I} (A)_i$ e def sulle frecce in modo appropriato (EX)

$$FI = \coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{\ \bar f\ } Y$$

---

$$\bar{I} \xrightarrow[\ f\ ]{} GY \cong Hom_{\mathbb{D}}(A, Y)$$

$$\forall i \quad f_i : \begin{tikzcd} (A)_i \arrow[r] \arrow[d, "m_i"'] & Y \\ \coprod_{i\in I}(A)_i \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \exists!\ \bar f \text{ t.c. } \bar f\, m_i = f_i$$

**EX** Dim. che $\overline{(\ )}$ è una biiezione naturale in $I$ e $Y$

questo ci assicura $F \dashv G$ $\square$

**EX** Se $G : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ tra preordini, $\underline{X}$ completo

$G$ aggiunto dx $\Leftrightarrow$ preserva i limiti