

CT

27 || 10 || 15

J: Ab \longleftrightarrow Grp R \dashv J

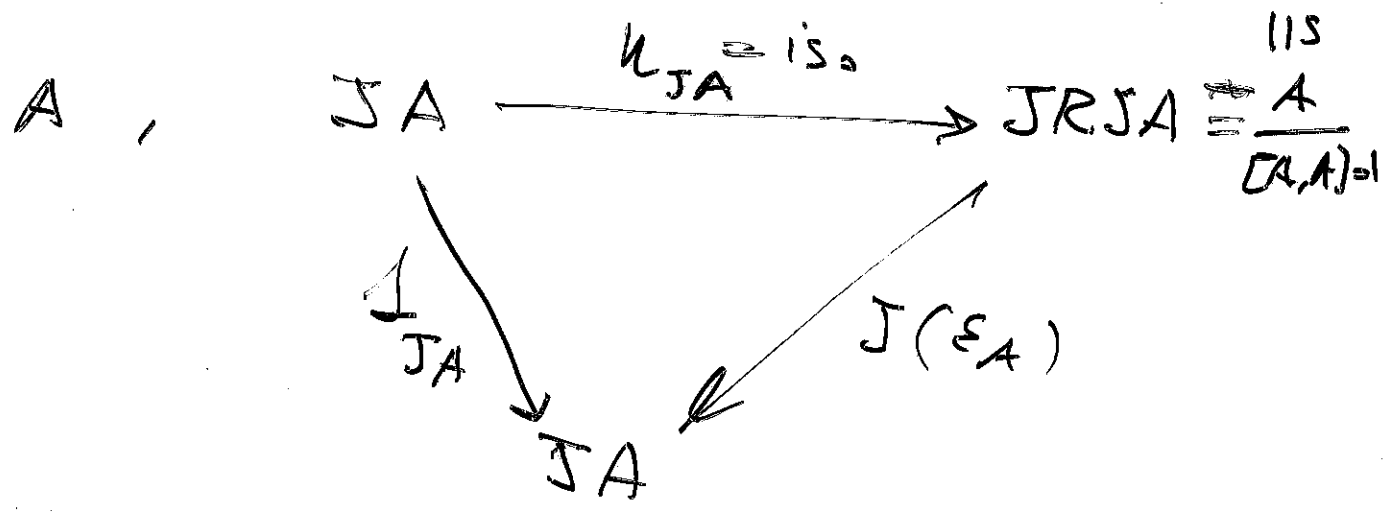
R: Grp \longrightarrow Ab

G \longrightarrow G/[G,G]

$\eta_G: G \longrightarrow JRG = G/[G,G]$

coerced - ?

$\forall A \in \underline{Ab}$ $\varepsilon_A: RJA \longrightarrow A$



$\exists! \varepsilon_A: RJA \longrightarrow A$ t.c.

$J(\varepsilon_A) \cdot \eta_{JA} = \iota_{JA}$

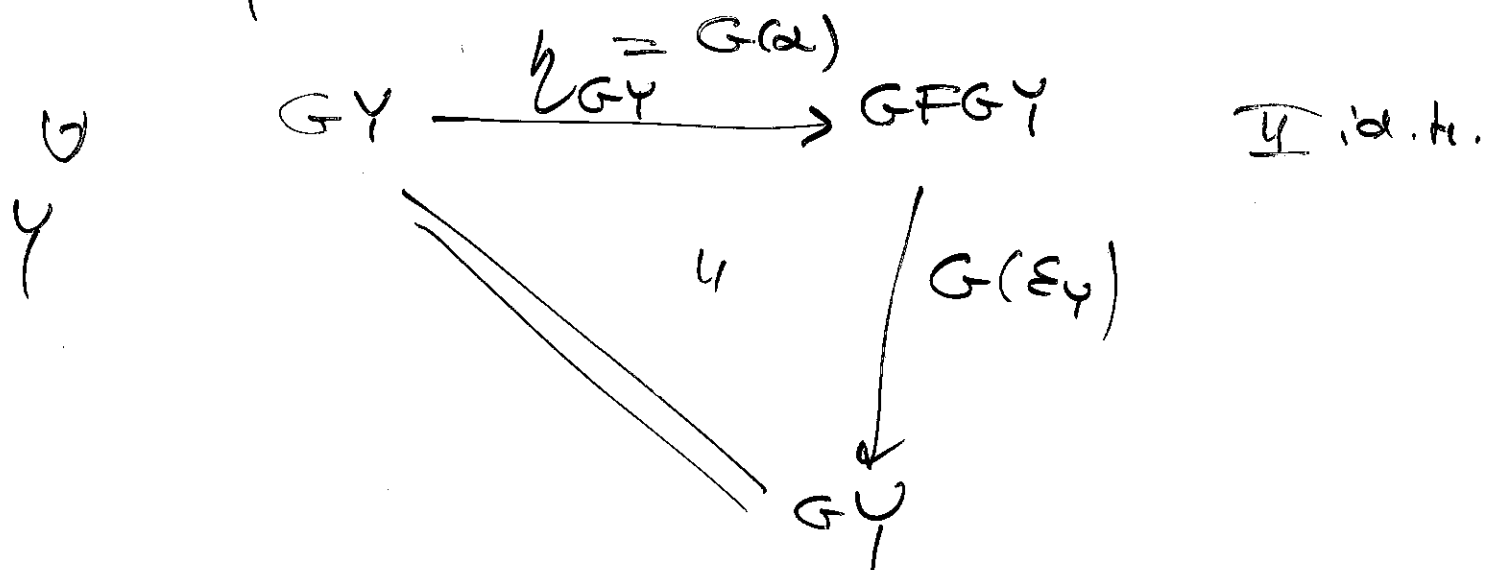
$\Rightarrow J(\varepsilon_A) \cong iso \implies \varepsilon_A \cong iso, J$ zifferle $\cong iso$

Tesees $F \dashv G$

G preserv e feblele \iff counitor iso natural
 F a " \iff unitor " "

Alte G preserv e feblele \implies

$\exists \eta$ $\epsilon_Y : FG Y \longrightarrow Y$ e' iso



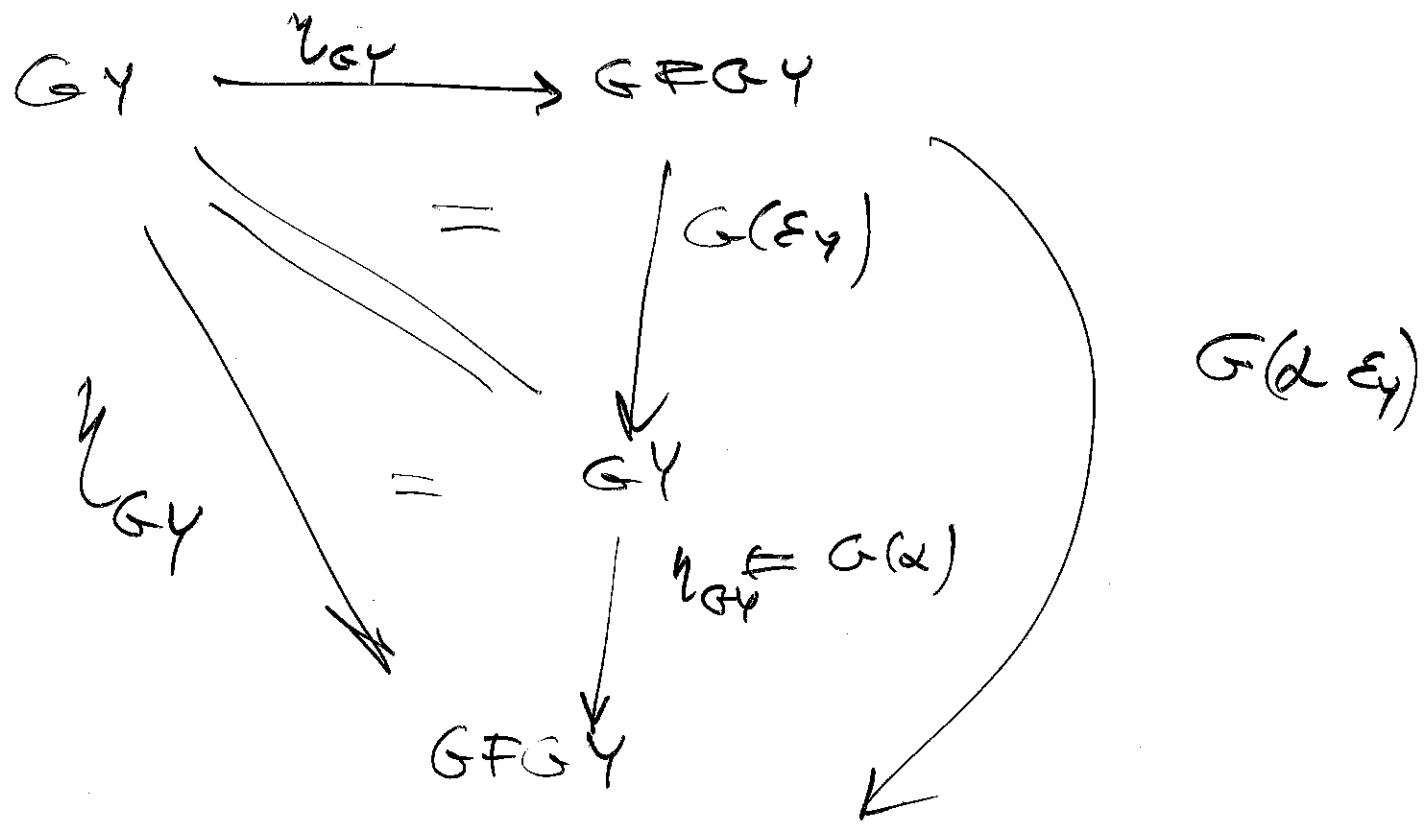
G preserv e feblele : $\exists ! \alpha : Y \longrightarrow FG Y$

t.c. $\eta_{GY} = G(\alpha)$

$$G(\epsilon_Y \cdot \alpha) = G(\epsilon_Y) \cdot G(\alpha) = \eta_{GY} = G(\eta_Y)$$

feblele $\implies \epsilon_Y \cdot \alpha = 1_Y$

$\alpha \cdot \epsilon_Y ?$



$$\left(G \left(I_{GFQY} \right) = I_{GFQY} \right) \cdot \eta_{GY} = \eta_{GY}$$

$$G(\alpha E_Y) \cdot \eta_{GY} = \eta_{GY}$$

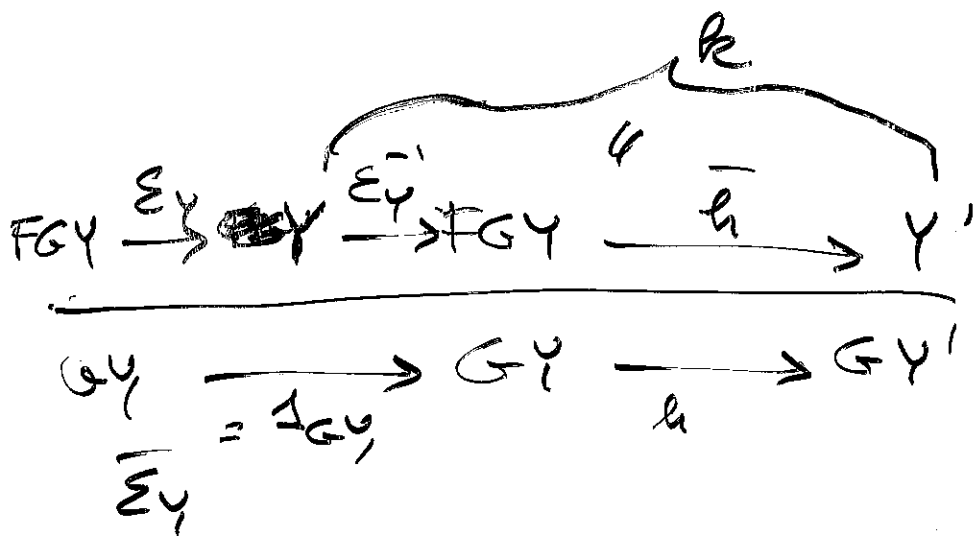
\Rightarrow per l'unicità della pr. universale di η

$$\Rightarrow I_{GFQY} = \alpha E_Y$$

$$\Rightarrow E_Y \text{ è un iso}$$

Viceversa, supponiamo che $\forall Y$ E_Y sia iso

TS G sia pieno e fedele, cioè
 data $h: GY \rightarrow GY'$, $\exists! k: Y \rightarrow Y'$
 con $G(k) = h$



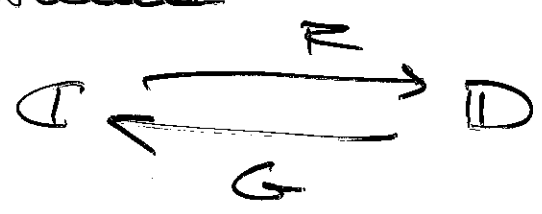
$$\begin{aligned}
 k \varepsilon_Y &= \bar{h} \\
 \overline{k \varepsilon_Y} &= \bar{\bar{h}} = h
 \end{aligned}$$

$$\overline{k \varepsilon_Y} = G(k) \bar{\varepsilon}_Y = G(k) \cdot 1_{GY} \quad \text{noto che} \\
 \parallel \\
 h \qquad \qquad \qquad G(k)$$

G è pieno e fedele

EX F pieno fedele $\Leftrightarrow \gamma$ è iso. □

Teorema



Sono equivalenti

- ① $F \dashv G$ γ, ε unità e counit
sono iso

(questo si chiama equivalenza
degenerata) F, G sono equivalenti
una pres. in algebras

② $F \dashv G$ se e solo se F e G pres e fedeli

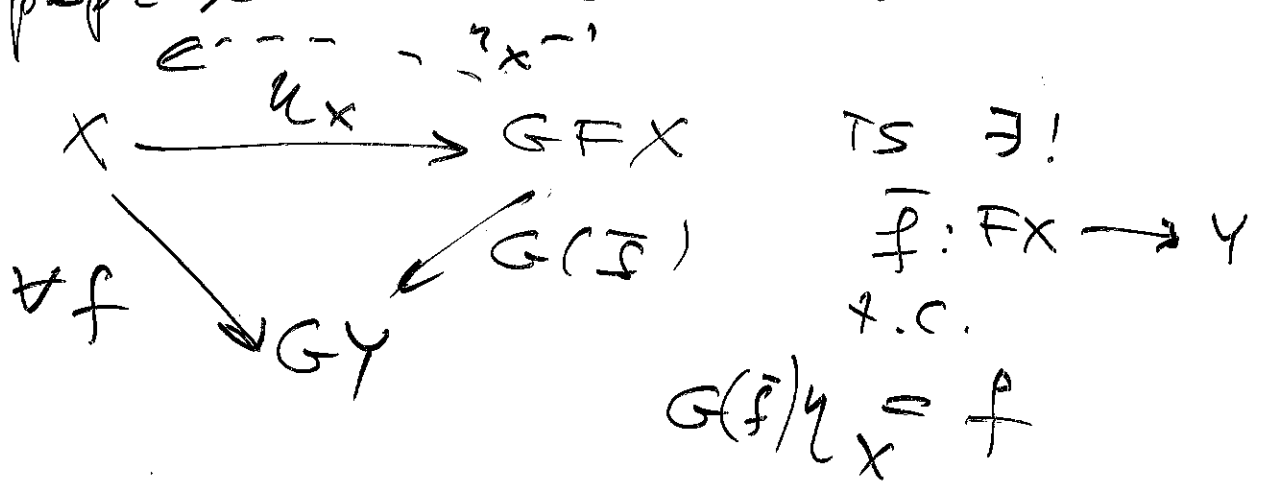
③ F, G sono equivalente con $G \circ F$ quasi invertibile una dell'altra, cioè $\exists \eta : Id_C \rightarrow GF$ e $\zeta : FG \rightarrow Id_D$ iso naturali

Dim ① \Leftrightarrow ② per il te precedente

① \Rightarrow ③ subito

③ \Rightarrow ①

Parto da $\eta : Id_C \rightarrow GF$ dato e lo uso come unita per l'applicazione $F \dashv G$, se dimo lo prop invertibile dell'unita



data $f \eta_x^{-1}: GF_X \longrightarrow GY$

G nuovo funtore $\implies \exists! \bar{f}: FX \rightarrow GY$

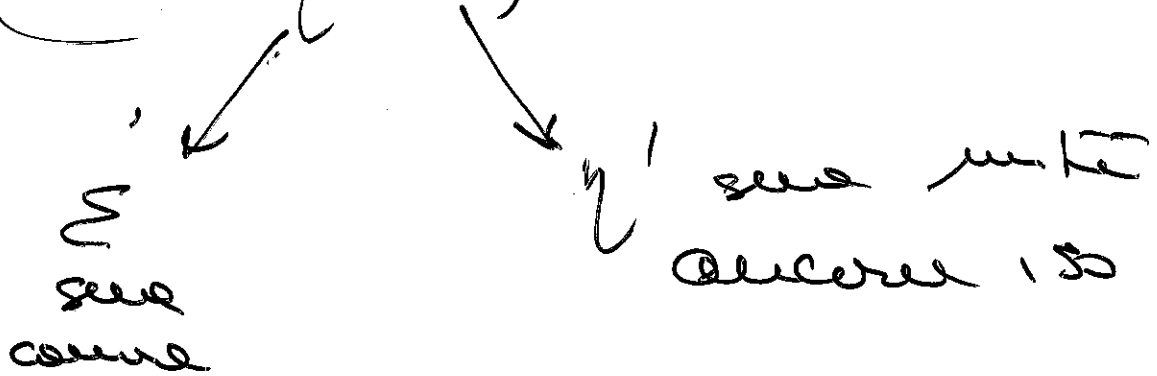
t.c. $G(\bar{f}) = f \cdot \eta_x^{-1}$

$$G(\bar{f}) \cdot \eta_x = f$$

$\implies F \dashv G$. Ma η determina la "sua" comuta \mathcal{E} che

(di solito) $\neq \mathbb{M}$ data nella definizione di equivalenza

(F, G, η, \mathbb{M}) dualmente equi



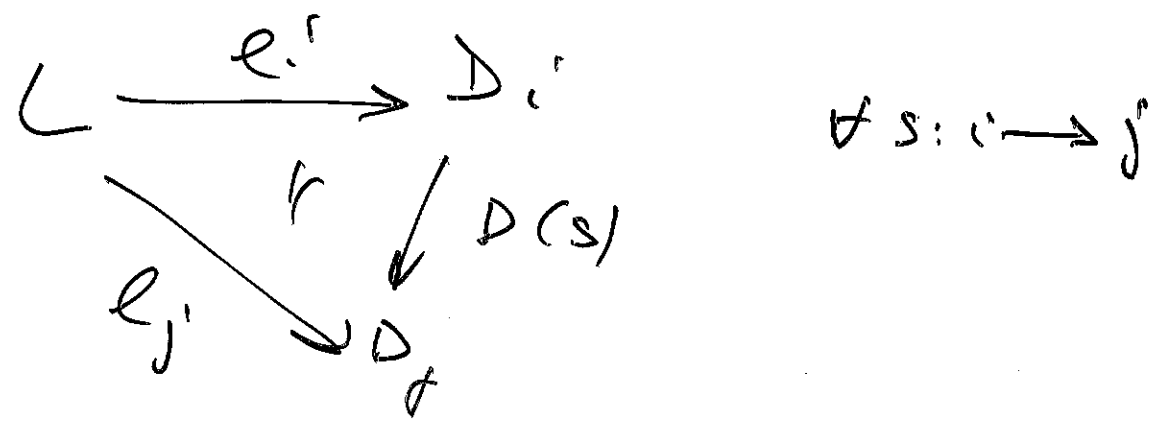
$F \dashv G$ con η \cong comuta e comuta 15 nat.

con Carrollano

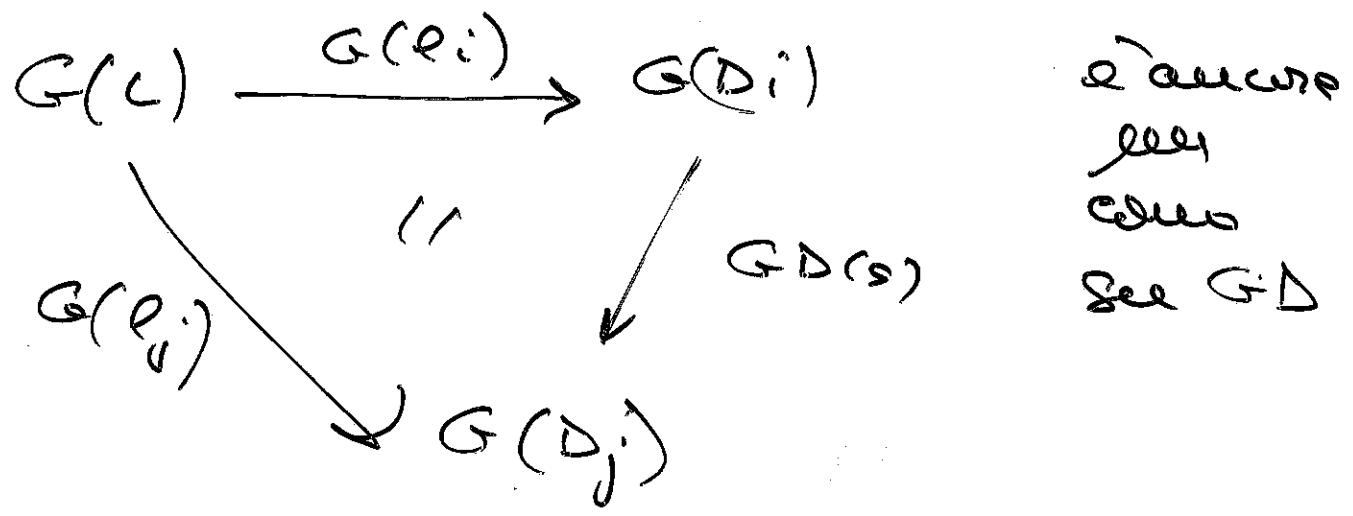
i $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ si ha anche

$$G \dashv F$$

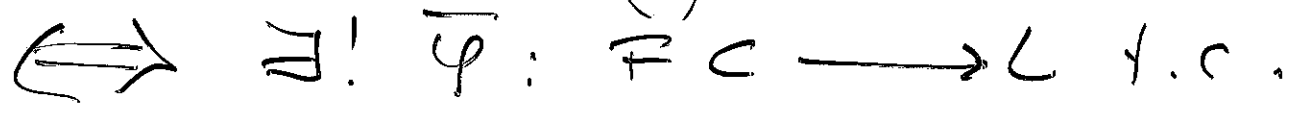
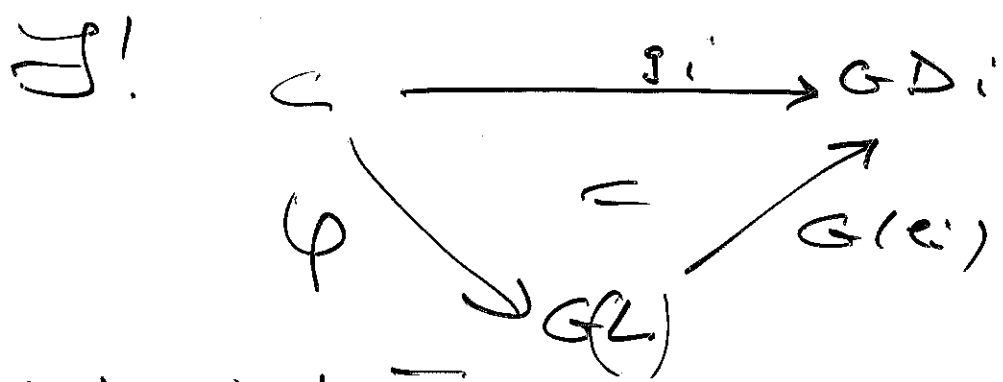
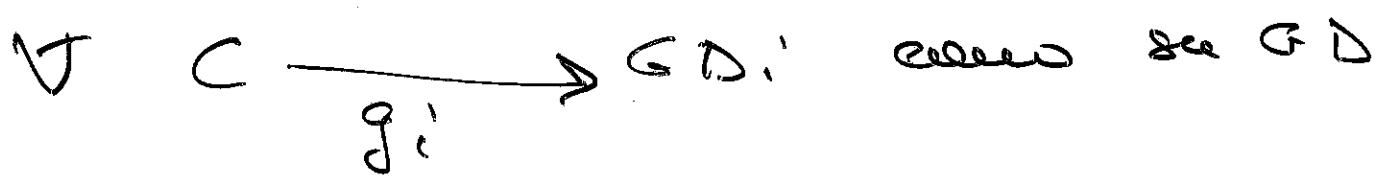
Dim Sia (L, e_i) con ~~terminale~~
 con elemento ~~dei~~ Δ $\sim \sigma$
 Terminale

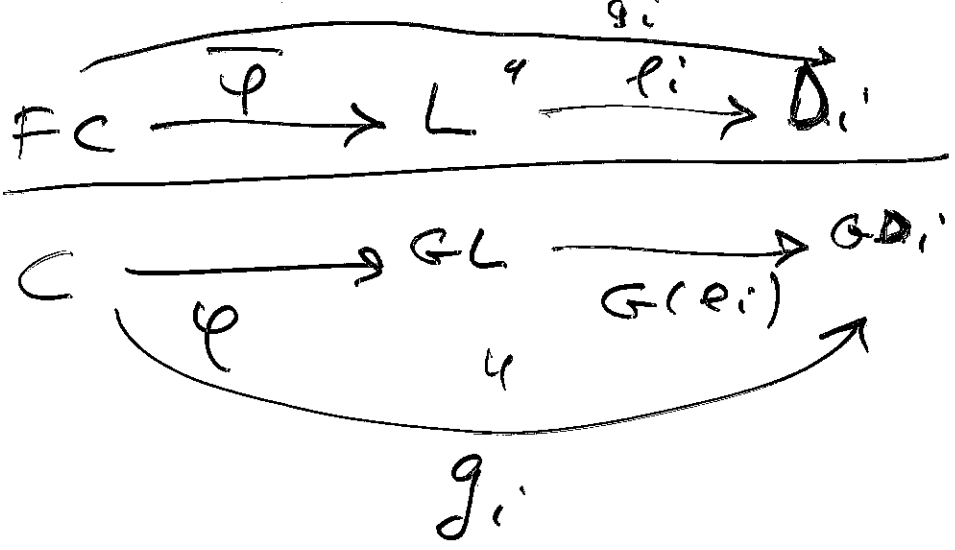


\Downarrow



Dobbiamo dire che è terminale





Dai $g_i: C \rightarrow GD_i$ fe aggiungere
 $\exists! \overline{g_i}: \overline{FC} \rightarrow \overline{D_i}$ come se D
 $\exists! \varphi \downarrow L \nearrow \rho_i$ (L.P.) è
terminati

$\Rightarrow (GL, G(\rho_i))$ è un limite
 su GD_i e C □

EX Prova la corrispondente
 proprietà per F u.v.t. ~~coluna~~
 colonna.

$G : \mathcal{D} \longrightarrow \underline{\text{Set}}$ qualunque

\mathcal{V}
 $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$

$$GY \xrightarrow{\eta_Y} \text{Hom}_{\underline{\text{Set}}}(\mathcal{A}^*, GY)$$

$$y \longmapsto f_y \text{ h.c. } f_y(\ast) = y$$

\bar{e} una morfismo naturale

Y
 $\downarrow h$
 Y'

$$\begin{array}{ccc}
 GY & \xrightarrow{\eta_Y} & \text{Hom}(\mathcal{A}^*, GY) \\
 \downarrow Gh & \subseteq & G(\mathcal{A}) \cdot - \\
 GY' & \xrightarrow{\eta_{Y'}} & \text{Hom}(\mathcal{A}^*, GY')
 \end{array}$$

$G \cong \text{Hom}(\mathcal{A}^*, G-)$
 naturalmente
 \cong

\mathcal{G} ha oggetti su F ,

$\text{Hom}(\mathcal{A}^*, G-) \cong_{\text{ID}} \text{Hom}_{\text{ID}}(F(\mathcal{A}^*), -)$
 SII
 G

G è rappresentabile e rappresentato
 da $F(\mathcal{A}^*) = A$

ma I è set è dato da

$$I \cong \coprod_{i \in I} \{*\}$$

$$\cong \coprod_{i \in I} \{*\}$$

$$F(I) = F\left(\coprod_{i \in I} \{*\}\right) = \coprod_{i \in I} (F\{*\})_i$$

" A

F è determinato da $F\{*\}$ e dalle sue copotenze

ovv & $G: \mathbb{D} \rightarrow \text{Set}$ è rappresentabile, $G \cong \text{flan}_{\mathbb{D}}(A, -)$ e in \mathbb{D} esistono tutte le copotenze di A

$$\coprod_{i \in I} (A)_i$$

$\Rightarrow G$ è un oggetto di \mathbb{D}

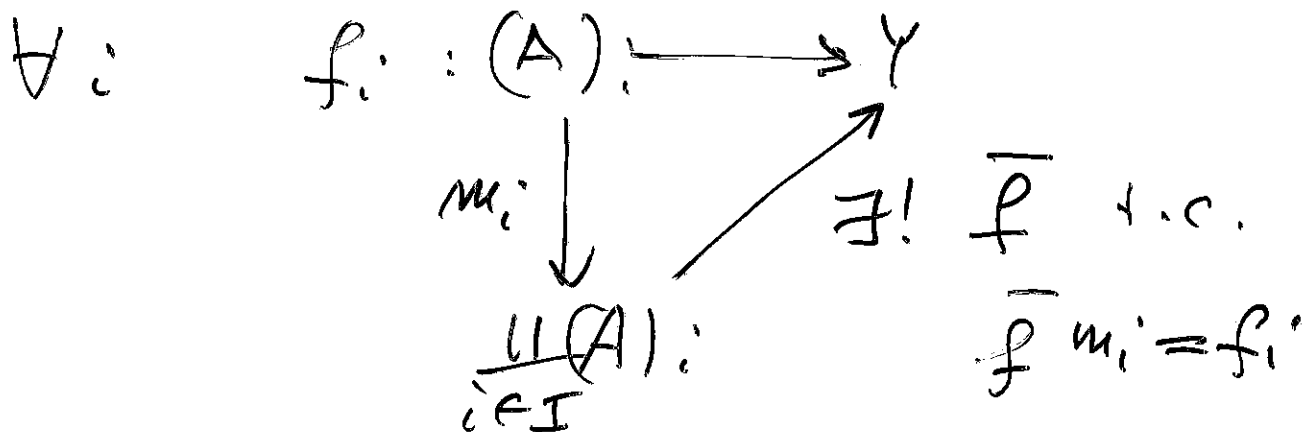
Altr $\text{Def } F: \text{Set} \rightarrow \mathbb{D}$

come $F(I) = \coprod_{i \in I} (A)_i$

e ad esse fissi in modo appropriato (EX)

$$FI = \coprod_{i \in I} A_i \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

$$I \xrightarrow{f} GY \cong \text{Hom}_{ID}(A, Y)$$



EX Dma che (\quad) è una

memoria naturale e $I \in Y$

questo ci assicura $F \dashv G \quad \square$

EX se $G: X \rightarrow Y$ X completo tra proclmi

G aggiunto ds \iff presenza di limit'