Th BASE HILBERT

A noeth $\Rightarrow$ $A[x]$ noeth

Dim

I ideale di $A[x]$ TS I f.g.

$I_A = \{ a \in A \mid a$ coeff dir di $p(x) \in I \}$

è un ideale di A $\Rightarrow$ è f.g.

diciamo da $a_1 \dots a_n$ coeff dir di

$p_1 \dots p_n$ in I

$d = \max_{i=1}^{n} gr(p_i)$

$\forall$ $k < d$ $\quad I_k = \{$ coeff dir di pol di I con grado $\leq k \}$

I_k è un ideale di A

$I_k \subseteq I_A$

I_k sarà generato da $a_1^{(k)} \dots a_{n_k}^{(k)}$

coeff dir di $p_1^{(k)} \dots p_{n_k}^{(k)}$

J = ideale di $A[x]$ generato da $\{ p_1 \dots p_n$

$p_1^{(k)} \dots p_{n_k}^{(k)} \quad k < d \}$

$J \subseteq I$. Sia $h \in I \setminus J$ pol di grado min tra quelli di $I \setminus J$.

Sia a = coeff dir di h $\quad a \in I_A$

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$$

se grado $h \geq d$

$$\tilde{h} = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i x^{gr(h) - gr(p_i)}$$

$\tilde{h}$ ha coeff dir $= a$ e stesso grado di h, ma $\tilde{h} \in J$ $\quad \tilde{h} - h \in I \setminus J$

ma ha grado $< h$ $\quad$ ASSURDO

$\Rightarrow$ grado $h < d$
$\quad\quad\quad\quad \| \; k$

il coeff dir di h $\quad a \in I_k$

$$a = \sum_{j=1}^{n^k} d_j a_j^{(k)}$$

$$\tilde{h} = \sum_{j=1}^{n^k} d_j p_j^{(k)} x^{gr(h) - gr(p_j^{(k)})}$$

e si ripete il ragionamento di prima

$\Rightarrow$ ASSURDO

OSS

è vero anche il viceversa

$$A[x] \xrightarrow{ev} A \qquad ev \text{ suriettivo}$$
$$p(x) \qquad\qquad p(0)$$

$\Rightarrow$ A è un quoziente di $A[x]$

$A[x]$ noeth. (art) $\Rightarrow$ A noeth. (art)

- il th non vale nel caso art. unione

k art k campo, ma

$k[x]$ NON è art

$$(x) \supseteq (x^2) \supseteq (x^4) \supseteq$$

- A noeth $\Rightarrow$ $A[[x]]$ serie formali noeth.

$\mathcal{N}$ = nilradicale $= \sqrt{(0)} = \{a \in A \mid \exists_n\, a^n = 0\}$

l'insieme dei nilpotenti = ideale =

$\bigcap P$ P primi di A

$\mathcal{R} = \bigcap \mathfrak{m}$ $\mathfrak{m}$ max in A

radicale di Jacobson

$\sqrt{I}/I$ = nilradicale di A/I $\doteq$ $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists_n\, a^n \in I\}$

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \supseteq I} P \qquad P \text{ primo di } A$$

$\Longrightarrow$ se P è Primo $\sqrt{P} = P$

Df Q è ideale primario se

dato $xy \in Q \Longrightarrow x \in Q$ opp $y \in \sqrt{Q}$

$\exists_n\, y^n \in Q$

$\Updownarrow$

in A/Q ogni divisore dello zero è nilpotente: infatti

$xy \in Q \iff [x \cdot y] = 0$ in A/Q

$\parallel$

$[x]\,[y] = 0$ se $[x] = 0$

- $[y] \neq 0$ (divisore dello zero)
  $[x] \neq 0$ $\Rightarrow y^n \in Q \iff [y]^n = 0$

$\iff [y]$ è nilpotente

<u>OSS</u> PRIMO $\Rightarrow$ PRIMARIO
$\not\Leftarrow$

(3^2) in $\mathbb{Z}$ è primario (EX)
ma non primo

<u>Prop</u> Q primario $\Rightarrow \sqrt{Q}$ primo
e quindi risulta il + piccolo primo che contiene Q

<u>DIM</u> $xy \in \sqrt{Q} \Rightarrow \exists_n (xy)^n \in Q$

$\Leftrightarrow x^n y^n \in Q$ o $x^n \in Q$ o $(y^n)^k \in Q$
$\Updownarrow$ $\Updownarrow$
$x \in \sqrt{Q}$ $y \in \sqrt{Q}$

<u>ESEMPI</u> in $\mathbb{Z}$ i primari ~~non~~ propri
(p^n)

- $k[x,y]$ $\quad Q = (x, y^2)$ è primario

$$\frac{k[x,y]}{(x,y^2)} \simeq \frac{k[y]}{(y^2)}$$

i divisori dello zero in $\frac{k[y]}{(y^2)}$

sono i multipli di y $\Rightarrow$

sono nilpotenti $\Rightarrow$ (x, y^2) è primario

$\sqrt{(x,y^2)} = (x,y)$ (primo, addirittura massimale)

<u>Prop</u> Se $\sqrt{Q}$ è massimale $\Rightarrow$

Q è primario

<u>Dim</u>

$\sqrt{Q} = M$ risulta l'unico primo che contiene Q

se in A/Q $\quad \sqrt{Q}/Q$ = nilradicale di A/Q

è l'unico massimale di A/Q

ogni elemento non invertibile di A/Q sta in $\sqrt{Q}/Q$ $\Rightarrow$ allora i divisori dello zero di A/Q stanno nel nilradicale $\Rightarrow$ sono nilpotenti $\Rightarrow$ Q è primario $\square$

Q primario $\not\Rightarrow$ $\sqrt{Q}$ massimale

ogni ideale primo non è massimale fa da controesempio

IDEALI IRRIDUCIBILI

<u>Df</u> I ideale di A è irriducibile $\Leftrightarrow$ se ogni volta che $I = J \cap K$ $\Rightarrow$ $I = J$ opp $I = K$

<u>LEMMA</u> A noeth.

Ogni ideale si può esprimere come $\bigcap$ finita di ideali irriducibili

<u>Dim</u> Supponiamo esista almeno un ideale I non esprimibile

come $\wedge$ finita di irriducibili.
Allora l'insieme Σ di tali ideali $\neq \emptyset$
e quindi per noeth di A ha
un elemento max I_M.
tale I_M è irriducibile (altrimenti
$I_M = I_M \wedge I_M$ finita di irriducibili)

$\Rightarrow I_M = J \cap K$ con $I_M \subsetneq J$ e
$I_M \subsetneq K$ ma o J o $K \in \Sigma$ (se J e $K \notin \Sigma$
$\Rightarrow I_M \notin \Sigma$)
$\Rightarrow$ assurdo per massimalità di I_M $\square$

<u>Prop</u> <u>A noeth</u>
ogni ideale irriducibile è primario

<u>Dim</u>

<u>EX</u> I irriducibile $\Leftrightarrow$
(0) " in A/I

Visto che A noeth $\Rightarrow A/I$ noeth
basta dire che partendo da (0)
irriducibile $\rightarrow (0)$ è primario

se $xy \in (0) \iff xy = 0$

se $y \neq 0$ $\underline{\underline{\text{TS}}}$ $\exists_n$ $x^n = 0$

$\mathrm{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ ideale

$\cap\!\!\mid$

$\mathrm{Ann}(x^2) = \{\dots \mid ax^2 = 0\}$

$\cap\!\!\mid$

$\mathrm{Ann}(x^3)$

$\cap\!\!\mid$

$\vdots$

$\mathrm{Ann}(x^n)$

$\cap\!\!\mid$

$\dots$

catena ascendente $\Rightarrow$ è stazionaria

$\mathrm{Ann}(x^n) = \mathrm{Ann}(x^{n+1}) = \dots$

$\overset{\text{TS}}{\Longrightarrow}$ $(x^n) \cap (y) = (0)$. Infatti

se $a \in (x^n) \cap (y) \Rightarrow$

$a = ky \Rightarrow ax = kyx = 0$

$a = bx^n \Rightarrow ax = bx^{n+1} = 0$

$b \in \mathrm{Ann}(x^{n+1}) = \mathrm{Ann}(x^n) \Rightarrow$

$b x^n = 0$

$\quad \shortparallel$

$\quad a$

ma (0) è irriducibile $\Rightarrow$ visto che $(y) \neq (0) \Rightarrow (x^n) = (0)$

$\Rightarrow x^n = 0$

<u>Corollario</u> (Decomposizione primaria degli ideali di A noeth.)

A noetheriano:

ogni ideale è esprimibile come $\cap$ finita di ideali primari

---

Il viceversa non è vero. Ci sono ideali primari che sono riducibili

in $k[x,y]$ $\quad I = (x^2, y^2, xy)$

Provare per ex che è primario e riducibile.

Prop

A noeth I ideale $\Rightarrow$ I contiene una potenza del suo radicale

cioè $\exists_m \; (\sqrt{I})^m \subseteq I$

Dim

$\sqrt{I}$ è un ideale di $A \Rightarrow$ f.g. da

$x_1 \dots x_n$, $\exists\, k_1 \dots k_n$ t.c.

$x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \in I$

Sia $m = \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1) + 1$

$(\sqrt{I})^m$ è generato da tutti i prodotti

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \qquad \sum_{i=1}^{n} r_i = m$$

se $\forall_i \; r_i < k_i$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} r_i \leq m-1 < m$

$r_i < k_i - 1$

in ogni tale prodotto $\exists j$ $r_j \geq k_j$

$\Rightarrow x^{r_j} \in I \Rightarrow$ ogni prodotto che genera $(\sqrt{I})^m \in I \Rightarrow (\sqrt{I})^m \subseteq I$. $\square$

<u>Corollario</u>

Per A noetheriano, il nilradicale $\mathcal{N}$ è nilpotente, $\exists_m \mathcal{N}^m = (0)$

<u>Prop</u>

A artiniano: ogni ideale primo è massimale

<u>Dim</u>

Sia P primo e $B = A/P$ dominio artiniano. Sia $x \neq 0$ $x \in B$

$(x) \supseteq (x^2) \ldots \supseteq (x^n) \supseteq \ldots$

$\exists_n$ $(x^n) = (x^{n+1}) \Rightarrow x^n \in x^{n+1}$

$\Rightarrow x^n = y\, x^{n+1} \Rightarrow x^n(1 - yx) = 0$

$x^n \neq 0 \Rightarrow 1 = yx \Rightarrow x$ è inv

$\Rightarrow B$ è un campo $\Rightarrow P$ è max

<u>Corollario</u>

dominio artiniano $\Rightarrow (0)$ è primo $\Rightarrow$ è massimale $\Rightarrow A/(0) \cong A$ è un campo

<u>Corollario</u>

in A artiniano $\mathcal{N} = \sqrt{0}$ = radicale di Jacobson

<u>Proposizione</u>

Ogni anello artiniano possiede un n° finito di ideali massimali (e quindi un n° finito di ideali primi)

<u>Dim</u> Σ = insieme delle $\cap$ finite di ideali massimali

$\Sigma \neq \emptyset \Rightarrow \Sigma$ ha elemento minimale

$\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n \quad \forall\, \mathfrak{m}$ max

$\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$

$\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n \subseteq \mathfrak{m}$

poiché $\mathfrak{m}$ è primo $\exists\, i : \mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m}$

$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$

$\Rightarrow \{\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n\}$ tutti i max di A

$\square$