DIMENSIONE DI KRULL

A anello

$P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n$ (inclusioni strette di ideali primi)

una tale catena ha lunghezza n

$\dim A = \sup \{$ lunghezze di catene di primi in $A \}$

(può essere $\dim A = \infty$)

k campo (0) è primo

$\dim k = 0$

$\mathbb{Z}$ $(0) \subset (p)$ p primo tutte le possibili catene

$\Rightarrow$

$\dim \mathbb{Z} = 1$

<u>Ex</u> A PID $\dim A = 1$

<u>Th</u> A noeth $\Rightarrow$ $\dim A[x_1 \dots x_n] = \dim A + n$

$\mathbb{Z}[x]$ $(0) \subset (p) \subset (p, x)$

$\mathbb{Z}_6$ (0) non è primo

gli unici ideali primi sono (2) e (3), che sono anche max

$\Rightarrow$ dim $\mathbb{Z}_6 = 0$

ma $\mathbb{Z}_6$ è finito $\Rightarrow$ è artiniano

<u>Proposizione</u>

A artiniano $\Rightarrow$ dim $A = 0$

<u>Dim</u>

Se (0) è primo $\Rightarrow$ A dominio + art $\Rightarrow$ campo
dim $A = 0$

Se (0) non è primo, essendo ogni primo massimale, dim $A = 0$

~~(P)~~ P primo sono solo catene formate di 1 elto

<u>Th</u> Un anello A è artiniano $\Leftrightarrow$ A è noeth. e dim $A = 0$

M A-modulo

M è f.g. (finitamente generato)

$\Leftrightarrow \exists \; A^{(n)} \xrightarrow{q} M$

libero + f.g. suriettivo

ogni modulo M si ottiene come quoziente di un libero

$$\mathrm{Ker}\,\varphi \rightarrowtail F \xrightarrow{\varphi} M$$

libero

<u>Df</u> M è detto con relazioni finite (f.r.) se $\exists$ una presentazione libera con $\ker \varphi$ f.g.

<u>Df</u> M è finitamente presentato (f.p.) $\Leftrightarrow$

$\exists$ una s. esatta

$$\begin{tikzcd}
A^{(s)} \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & A^{(r)} \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Im} f \cong \ker \varphi \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

f.g.

$\Downarrow$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker \varphi \arrow[r, tail] & A^{(r)} \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

f.g. f.g.

M f.p. $\Longrightarrow$ f.g + f.v.

$\Longleftarrow$?

Prop

A noeth

ogni mod f.g. è f.p.

Dim

$$\ker\varphi \longrightarrow A^{(s)} \xrightarrow[\varphi]{} M$$

$\ker\varphi$ = f.g. ; A noeth.

perché sottomod di un mod noeth

Se A è non noeth

vedremo un esempio di f.g. non f.p.

Prop

$$P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

seq. esatta

f.g. $\Longrightarrow$ N è f.g.

Dim Supp P generato da

$a_1 \dots a_n$

$\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ le immagini in N sono generatori di $\operatorname{Im} f = \ker g$

$\overset{\shortparallel}{f(a_1)} \dots$

$M \cong N/\ker g$ per ipotesi è f.g.

diciamo da $[b_1] \dots [b_s]$

TS $\{\bar{a}_1, \dots \bar{a}_n, b_1 \dots b_s\}$ generano N: infatti se $x \in N$

$$[x] = \sum_{i=1}^{s} r_i [b_i] \qquad r_i \in A$$

$$x - \sum_{i=1}^{s} r_i b_i \in \ker g$$

$$\overset{\shortparallel}{\sum_{j=1}^{n} s_j \bar{a}_j} \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{s} r_i b_i + \sum_{j=1}^{n} s_j \bar{a}_j$$

$\square$

(ii) $0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ (7)

SEC. con M f.p. e N f.g.

$\Rightarrow P$ è f.g.

<u>Dim</u> M è f.p. allora $\exists$ SEC

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "f'g"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A^{(s)} \arrow[r, "q"] \arrow[d, dashed, "\exists \alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\exists! \beta$

$A^{(S)}$ è lib $\Rightarrow$ proiettivo $\exists \alpha$

$g\alpha = q$

$g(\alpha i) = 0 \Rightarrow \exists \beta : K \longrightarrow P$

t.c. $f\beta = \alpha i$

(1) è allora un push out

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
P \arrow[r] \arrow[d] & N \text{ f.g.} \arrow[d] \\
\operatorname{coker}\beta \arrow[r, equal, "\sim"] & \operatorname{coker}\alpha \\
 & \| \\
 & \text{f.g.}
\end{tikzcd}$$

Ex

$\operatorname{coker}\alpha \cong \operatorname{coker}\beta$

coker β è f.g

$$\underset{\text{f.g.}}{K} \longrightarrow P \longrightarrow \underset{\text{f.g.}}{\operatorname{coker}\beta} \longrightarrow 0$$

sequenza

$\Rightarrow$ P è f.g. $\square$

ESEMPIO DI MODULO f.g. NON f.p.

A non noeth. $\Rightarrow \exists\, I$ non f.g.

$$0 \to I \longrightarrow \underset{\text{f.g.}}{A} \longrightarrow A/I \to 0$$

SEC

Se A/I fosse f.p. (e non solo f.g.) allora anche I sarebbe f.g.

<u>ASSURDO</u>

$\square$

LEMMA DI SCHANUEL

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{q} M \longrightarrow 0$$

$$0 \to K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{q'} M \longrightarrow 0$$

P e P' proiettivi $\Rightarrow K \oplus P' \cong K' \oplus P$

Dim Poiché P proiettivo, $\exists\, \alpha: P \to P'$ e $\beta: K \to K'$ come prima tale che

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "①"] & P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "i'"'] & P' \arrow[r, "q'"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $(\beta, \alpha, 1_M)$ morfismo di SEC

$\Rightarrow$ ① è un p.o. con immersione $\Rightarrow$

$$0 \to K \xrightarrow{\langle \beta, i \rangle} K' \oplus P \xrightarrow{\begin{pmatrix} i' \\ -\alpha \end{pmatrix}} P' \to 0$$

è una SEC (PROMME X EX)

che fuge in P'

$\Rightarrow$ è spezzante $K' \oplus P \cong K \oplus P'$

$\square$

M f.g. + f.v. $\Rightarrow$ f.p.

$$0 \to K \to A^{(s)} \to M \to 0 \qquad \text{f.g.}$$

$$0 \to K' \to F \to M \to 0 \qquad \text{f.v.}$$

K' f.g, F libero

$$\underset{\text{f.g.}}{\underset{\parallel}{K \oplus F}} \cong \underset{\text{f.g.}}{A^{(s)} \oplus K'}$$

$\Downarrow$

K e F sono f.g.

$A, B \in CRing$

$f : A \longrightarrow B$ omo di anelli

mediante f ottengo su B una struttura di A-modulo

$$a \cdot b = f(a) \cdot b$$

↑ prodotto in B

Il prodotto in B risulta bilineare rispetto a questa struttura di A-mod

$(\Leftrightarrow \quad \cdot \quad : B \otimes_A B \longrightarrow B$

$(\Leftarrow)$

B diventa così una Algebra su A ass, commutativa unitaria

Df $A \in CRing$

B si dice A-algebra se è un A-modulo dotato di un prodotto $[\,,\,] : B \times B \longrightarrow B$ BILINEARE rispetto alla struttura di A-modulo

- $[ax+by, z] = a[x,z] + b[y,z]$
- $[z, ax+by] = \ldots$

Se il prodotto $[\,,\,]$ su B dà una struttura di monoide $\Rightarrow$ B è detta A algebra associativa (unitaria)

Se è monoide commutativo $\Rightarrow$ B A alg commutativa

EX

$\mathrm{End}(M)$ $\quad$ M - A modulo

$k[x]$ $\quad$ k alg commutativa

Algebra di Lie L:

L A modulo $+$

$[\,,\,] : L \times L \longrightarrow L$ bilineare con

- $[x,x]=0 \Rightarrow [x,y]=-[y,x]$
- IDENTITA' di JACOBI

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

DA QUI OTTENIAMO che

$$[x,[y,z]]-[[x,y],z]=[[z,x],y]$$

Se B è alg ass, costruisco un prodotto di Lie

$$[x,y]:=xy-yx$$

D'ORA INPOI PARLEREMO SOLO DI algebre ASS (UNIT)

B A-alg ass $\Rightarrow$ ha una struttura di anello unitario (non nec commutativo)

Posso def $f : A \longrightarrow B$

$a \qquad a \cdot 1_B$

Si ha che

1) f è un omo di anelli

2) $f(A) \subseteq$ centro $B = \{x \in B \mid xy = yx \quad \forall y \in B\}$

Vice, dato f omo $A \to B$ di anelli

con (2) B diventa una A-algebra associativa $a \cdot b = f(a)b$

<u>Corollario</u> Se B ~~è comm~~ $\in$ CRing

$\Rightarrow$ (2) è automatico e quindi B è A-algebra commu

$\Leftrightarrow f : A \longrightarrow B$ di anelli

$\boxed{\text{Da provare per EX}}$