Programma
Teoria delle Categorie
a.a. 2010/11

Prof. S. Mantovani

Categorie e Funtori. Monoidi e preordini. Categorie. Categoria duale. Funtori covarianti e controvarianti. Isomorfismi. Trasformazioni e isomorfismi naturali. Equivalenze. Dualita' di Boole. Doppio duale k-spazi vettoriali.
Funtori pieni, fedeli, essenzialmente suriettivi. Rapporto con equivalenze usando assioma di scelta. Equivalenze preservano finale e iniziale. Esempi di funtori pieni e fedeli, ma non equivalenze.
Proprietà universali. Prodotto e coprodotto, gruppo libero con le proprieta' universali.
Prodotto tensore.
Funtori rappresentabili. Caso M-set e prefasci.
Lemma di Yoneda con dimostrazione e esempi nei casi precedenti. Conseguenze di Yoneda.
Limiti e colimiti. Monomorfismi e epimorfismi. Esempi di mono non iniettivo e epi non suriettivi, categorie bilanciate. Proprietà di mono e epi. Concetto di limite e colimite. Diagrammi, coni e coconi. Equalizzatori e coequalizzatori. Mono e epi regolari. Categorie complete e finitamente complete.
Aggiunzioni. Proprietàdi aggiunzione di un'equivalenza: calcolo eplicito della t.n. tra hom-set. Definizione di adjoint situation con iso naturale sugli hom-set. Passaggio alla proprietà universale (senza dim). Aggiunzione via proprietà universale e via identità triangolare. Equivalenza tra le tre definizioni. Aggiunti ds e sin al dimenticante da Top. Caso inclusione abeliani nei gruppi e suo aggiunto sin. Aggiunzione con aggiunto pieno e fedele e unità iso. Equivalenze e equivalenze aggiunte. Preservazione dei limiti per aggiunti ds. Rappresentabili e aggiunti ds. Aggiunzioni nei preordini.
Monadi. Monade del monoide libero. Monadi. Algebre per una monade. Categoria delle algebre. Algebre libere. funtore dimenticante e funtore libero associati ad una monade. Dalle monadi alle aggiunzioni e dalle aggiunzioni alle monadi. Funtore di confronto. Funtore monadico. Proprietà dei funtori monadici. Esempi di funtori monadici e non.
Categoria End(C) degli endofuntori e monade come oggetto monoide in End(C).
Categorie monoidali. Categorie monoidali strette: End(C) e insiemi finiti totalmente ordinati. Categorie monoidali e teorema di coerenza. Esempi: categorie con prodotto, con coprodotto, r-moduli con prodotto tensore. Monoidi in una monoidale. Esempi: monade come monoide in End(C), anello=monoide in (Ab, tensore, Z), monoidi commutativi come monoidi in Mon, categorie monoidali strette come monoidi in CAT. Monoidali simmetriche. Monoidali chiuse.
Ab è monoidale chiusa rispetto al prodotto tensore, ma non è cartesiana chiusa. Set^C è cartesiana chiusa.
Topos elementari. Esponenziali per prefasci. Caso M-sets.
Classificatore per sottoggetti. Topos come categorie di insiemi variabili. Classificatore per sottoggetti per prefasci. Ab non ha classificatore per sottoggetti. Definizione di topos elementare.
Topos di Grothendieck. Fasci su uno spazio topologico. Spazi etale ed equivalenza con Sh(X). Localizzazioni.
Topologie di Grothendieck su un sito e fasci su un sito. Localizzazioni di Prefasci e topos di Grothendieck. Prefasci di abeliani. Oggetti abeliani interni.
Categorie regolari ed esatte. Relazioni d'equivalenza interne. Kernel pair. Equivalenze non effettive nei liberi da torsione. Epimorfismi estremali, forti, regolari, spezzanti e relazioni tra loro. Proprietà epi estremali in una categoria lex. Fattorizzazione (epi estremale, mono). Definizione

categoria regolare via epi estremali. In una categoria regolare epi regolari coincidono con epi estremali. Definizione alternativa di regolarità con coequalizzatori. Top non è regolare. Categorie esatte. Categorie di Mal'cev.
Categorie additive. Ab-Categorie. Biprodotti. Categorie additive. Proprietà di mono e epi. Unicitàstruttura additiva.
Categorie abeliane. Una categoria abeliana è finitamente completa e cocompleta, ha una struttura additiva, ha tutte le relazioni di equivalenza effettive ed è regolare.
Una categoria è abeliana se e solo se additiva e Barr-esatta

Testi di riferimento

S. Mac Lane: Categories for the working mathematician, Springer, 1997, 2nd edition

S. Awodey: Category theory, Oxford University Press, 2006

J. Adamek, H. Herrlich, G. Strecker: Abstract and concrete categories, Wiley Interscience Publ. 1990. http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf

T. Leinster, Basic Category Theory, Cambridge University Press, 24/lug/2014

F. Borceux: Handbook of categorical algebra, 1-2-3, Cambridge University Press, 1994

Mac Lane, Saunders; Moerdijk, Ieke Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory. Corrected reprint of the 1992 edition. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.