MATEMATICHE ELEMENTARI DA UN PUNTO DI VISTA SUPERIORE I

OBIETTIVI

La prima parte del corso si propone di fornire una introduzione alla teoria assiomatica degli insiemi secondo Zermelo-Fraenkel, per introdurre le nozioni di insieme finito e infinito, e studiare i numeri naturali, i numeri ordinali e i numeri cardinali con le rispettive proprietà e aritmetiche.
La seconda parte del corso si propone di fornire una introduzione alle geometrie non euclidee con particolare attenzione alla geometria del piano iperbolico. Saranno forniti altresì cenni alla geometria dello spazio ellittico tridimensionale.

TIPOLOGIA DEL CORSO

Lezioni frontali, in parte dedicate ad esercitazioni.

PROGRAMMA DEL CORSO

I PARTE

Introduzione: generalità sui linguaggi e sulle teorie del I ordine. Il linguaggio della teoria degli insiemi.
Insiemi astratti. Relazione di appartenenza. Assioma di estensionalità. Assiomi del vuoto, della coppia, dell'unione e della potenza.
Assioma di separazione. Introduzione delle operazioni tra insiemi. Non esistenza di un insieme universale. Relazioni e funzioni, famiglie e prodotti di famiglie di insiemi.
Cardinalità. Teorema di Cantor. Teorema di Cantor, Bernstein, Schröder.
Insiemi riflessivi. Successore. Insiemi ereditari. Assioma dell'infinito. L'insieme ω dei numeri naturali.
Principio di induzione, di induzione forte, del minimo. Proprietà di ω. Assiomi di Peano. Operazioni sui naturali.
Insiemi finiti. Assioma di scelta. Teorema di Ricorsione primitiva su ω. Principio di induzione e ricorsione su buon ordini. Insiemi infiniti. Confronto tra insiemi bene ordinati. Ordinali (di Von Neumann). Confronto tra ordinali.
Assioma di rimpiazzamento. Principio del buon ordinamento. Cenni all'aritmetica ordinale. Cardinali. Cenni all'aritmetica cardinale.

Testi consigliati

P. R. Halmos, *Teoria elementare degli insiemi*, Feltrinelli, 1970.
G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, Bollati Boringhieri, 1994.

II PARTE

Introduzione: generalità sui sistemi assiomatici, consistenza e categoricità. Gli assiomi della geometria iperbolica del piano. Modelli.
Modello del semipiano complesso superiore, $\mathbb{H}$. Lunghezza e distanza in geometria iperbolica. Cerchi e rette. Trasformazioni di Möbius. Geodetiche in $\mathbb{H}$.
Modello del disco di Poincaré. Distanza nel disco di Poincaré. Trasformazioni di Möbius

nel disco di Poincaré.
Teorema di Gauss–Bonnet in geometria iperbolica.
Trigonometria iperbolica. Triangoli rettangoli e angolo di parallelismo.
Classificazione delle trasformazioni di Möbius.
Gruppi Fuchsiani. Cenni.
Geometria ellittica. Il modello di Klein per la geometria ellittica in 3 dimensioni. Parallelismo di Clifford.

Testi consigliati

J. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 1999.
S. Katok, *Fuchsian Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Chicago University Press, 1992.
F. Klein, *Vorlesungen über nicht–Euklidische Geometrie*, Berlin, 1928. (Sarà fornita una traduzione italiana di alcune parti dell'opera.)

Elementary mathematics from an Advanced standpoint I

Objectives

The aim of the first part of this course is to provide an introduction to the axiomatic Zermelo-Fraenkel Set Theory. The notions of finite and infinite sets, natural numbers, ordinals and cardinals will be given and studied, together with the related arithmetics.

The aim of the second part of this course is to provide an introduction to non–Euclidean geometry, namely the geometry of hyperbolic plane. Hints will be given on the geometry of elliptic 3–space.

TYPE OF COURSE

Traditional lectures, partly devoted to exercises.

PROGRAM

I PART

Introduction: Hints on syntax and first-order theories. Set theory alphabet and language. Abstract sets. Membership relation. Axiom of extensionality. Axioms of the empty set, of pairing, of union and of power set.
Axiom schema of separation. Operations between sets. Problem of the existence of a universal set. Relations and functions, families and products of families of sets.
Cardinality. Cantor's Theorem. Cantor-Bernstein-Schröder Theorem.
Reflexive sets. Successor. Hereditary sets. Axiom of infinity. The set ω of natural numbers. The Principle of mathematical induction with the strong version, and the well-ordering principle. Properties of the set ω. Peano's axioms. Sum and product in ω.
Finite sets. Axiom of choice. Theorem of primitive recursion on ω. Principle of induction and recursion for well ordered sets. Infinite sets. Comparison between well ordered sets. Ordinals (von Neumann). Comparison between ordinals.
Axiom schema of replacement. Well-ordered principle for ordinals. Cardinals. Hints on the arithmetic of ordinals.

Recommended books

P. R. Halmos, *Teoria elementare degli insiemi*, Feltrinelli, 1970.
G. Lolli, *Dagli insiemi ai numeri*, Bollati Boringhieri, 1994.

II PART

Axiomatic systems, consistency and categoricalness. The axioms of hyperbolic plane geometry. Models.
Upper half–plane model, $\mathbb{H}$. Length and distance in hyperbolic geometry. Circles and straight–lines. Möbius transformations. Geodesics in $\mathbb{H}$.
Poincaré disc model, $\mathbb{D}$. Distance in the Poincaré disc model. Möbius transformations in $\mathbb{D}$.
Gauss–Bonnet theorem in hyperbolic geometry.
Hyperbolic trigonometry. Right–angled triangles and parallelism angle.
Classification of Möbius transformations.
Fuchsian groups. Hints.
Elliptic geometry. Klein's model for elliptic 3–space. Clifford's parallelism.

Recommended books

J. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 1999.
S. Katok, *Fuchsian Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Chicago University Press, 1992.
F. Klein, *Vorlesungen über nicht–Euklidische Geometrie*, Berlin, 1928. (An Italian translation of some parts of this book will be given.)