1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{3}{(4x-1)^{\frac{7}{4}}} & \text{per} \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X:
a) $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\frac{3}{(4x-1)^{\frac{7}{4}}} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$;
b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1/2} 0dx + \int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{3}{(4x-1)^{\frac{7}{4}}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{\left(\sqrt[4]{(4x-1)}\right)^3} \right]_{1/2}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[4]{(4b-1)}\right)^3} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X > 0) := \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1/2} 0dx + \int\limits_{1/2}^{+\infty} \frac{3}{(4x-1)^{\frac{7}{4}}}dx = 1;$

iii) calcolare la probabilità $P(X < \frac{17}{4}) = \int\limits_{-\infty}^{1/2} 0dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{17}{4}} \frac{3}{(4x-1)^{\frac{7}{4}}}dx = \left[\frac{-1}{\left(\sqrt[4]{(4x-1)}\right)^3} \right]_{1/2}^{\frac{17}{4}} = \frac{7}{8}.$

2) In una scatola ci sono 12 caramelle, 5 delle quali sono alla ciliegia. Scegliendone 8 a caso,
i) qual è la probabilità P_1 di averne preso solo una alla ciliegia?
È un caso di distribuzione ipergeometrica, con $N = 12$, $K = 5$, $n = 8$, $k = 1$, quindi $P_1 = \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{7}}{\binom{12}{8}} = \frac{1}{99}$.
ii) Qual è la probabilità P_2 di averne preso almeno una alla ciliegia? $P_2 =1$ (sono solo 7 quelle non alla ciliegia, quindi P_2 è la probabilità dell'evento certo).

3) La ditta Vergilio vende burro in panetti il cui peso è rappresentabile con una variabile aleatoria X con distribuzione normale di media $\mu = 250$ g e deviazione standard $\sigma = 1.5$g.
i) Qual è la probabilità $P_1 = P(X > 249)$ che un panetto di burro preso a caso pesi più di 249 g?
$P_1 = P(X > 249) = P(Y > \frac{249-250}{1.5} = -\frac{2}{3}) = P(Y > -\frac{1}{1.5} \simeq -0.67) = P(Y < 0.67) \simeq 0.7486.$
ii) Qual è la probabilità $P_2 = P(250 < X < 252)$ che un panetto di burro preso a caso pesi più di 250 g e meno di 252 g?
$P_2 = P(250 < X < 252) = P(X < 252) - P(X < 250) = P(Y < \frac{252-250}{1.5} = \frac{4}{3} \simeq 1.33) - 0.5 \simeq 0.9082 - 0.5 = 0.4082.$
iii) Qual è la probabilità $P_3 = P(X = 250)$ che un panetto di burro preso a caso pesi esattamente 250 g? $P_3 = 0$ (X è una v.a.continua!).

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 7% ha sensibilità pari al 93% e specificità pari al 95%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$$P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M) + (1 - P(Neg|S))\,(1 - P(M))} = \frac{0.93 \cdot 0.07}{0.93 \cdot 0.07 + 0.05 \cdot 0.93} = \frac{7}{12} \sim 0.58.$$

Qual è la probabilità $P(Neg)$ che, sottoponendo al test un individuo qualunque, il test risulti negativo?
$P(Neg) = P(Neg|M)P(M) + P(Neg|S)P(S) = (1 - P(Pos|M))\,P(M) + P(Neg|S)\,(1 - P(M)) = 0.07 \cdot 0.07 + 0.95 \cdot 0.93 = 0.8884.$