1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{(3x-2)^{\frac{5}{3}}} & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}.$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X:

a) $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\frac{2}{(3x-2)^{\frac{5}{3}}} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$;

b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2}{(3x-2)^{\frac{5}{3}}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3x-2)}\right)^2} \right]_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3b-2)}\right)^2} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X > 0)$:

$P(X > 0) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{2}{(3x-2)^{\frac{5}{3}}}dx = 1.$

iii) calcolare la probabilità $P(X < \frac{10}{3})$.

$P(X < \frac{10}{3}) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{10}{3}} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{\frac{10}{3}} \frac{2}{(3x-2)^{\frac{5}{3}}}dx = \left[\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3x-2)}\right)^2} \right]_1^{\frac{10}{3}} = \frac{3}{4}.$

2) In un cassetto ci sono 8 pile, 5 delle quali sono scariche. Scegliendone 3 a caso,

i) qual è la probabilità P_1 di averle prese tutte scariche?

È un caso di distribuzione ipergeometrica, con $N = 8$, $K = 5$, $n = k = 3$, quindi

$P_1 = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{\frac{5!}{3!2!}\frac{3!}{3!0!}}{\frac{8!}{3!5!}} = \frac{5!}{3!2!}\frac{3!5!}{8!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{2!8\cdot7\cdot6} = \frac{5}{28}.$

ii) Qual è la probabilità P_2 di averne preso solo una carica?

È un caso di distribuzione ipergeometrica, con $N = 8$, $K = 5$, $n = 3, k = 1$, quindi

$P_1 = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{\frac{5!}{4!1!}\frac{3!}{2!1!}}{\frac{8!}{3!5!}} = \frac{5\cdot3}{1}\frac{3!5!}{8!} = \frac{15}{56}.$

3) Una macchina produce viti la cui lunghezza può essere rappresentata con una variabile aleatoria X che si distribuisce normalmente, con media $\mu = 1,62$ cm e $\sigma = 0,4$ cm.

i) Qual è la probabilità $P_1 = P(X < 1,61)$ che una qualunque vite prodotta misuri meno di $1,61$ cm?

$P(X < 1,61) = P(Y < \frac{1,61-1,62}{0,4} = -0,25) = 1 - P(Y < 0,25) \simeq 1 - 0,5987 = 0,401\,3$

ii) Su 5 viti prodotte (indipendentemente), qual è la probabilità P_2 che esattamente2 viti misurino più di $1,62$ cm?

È una distribuzione binomiale, con $p = \frac{1}{2}$, $n = 5$, $k = 2$, quindi $P_2 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$.

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 5% ha sensibilità parial 95% e specificità pari al 96%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$$P = P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M) + P(Pos|S)P(S)} = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M) + (1 - P(Neg|S))\,(1 - P(M))} =$$
$$\frac{0.95 \cdot 0.05}{0.95 \cdot 0.05 + 0.04 \cdot 0.95} = \frac{5}{9}.$$

Qual è la probabilità $P(Pos)$ che, sottoponendo al test un individuo qualunque, il test risulti positivo?

$$P(Pos) = P(Pos|M)P(M) + P(Pos|S)P(S) = P(Pos|M)P(M) + (1 - P(Neg|S))\,(1 - P(M)) =$$
$$0.95 \cdot 0.05 + 0.04 \cdot 0.95 = 0.95 \cdot 0.09 = .0\,855.$$