

Statistica (I Parte)
Corso di Laurea in Scienze Naturali

1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{\sqrt[3]{(3x+2)^5}} & \text{per } x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} .$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X ;

a) $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\frac{2}{\sqrt[3]{(3x+2)^5}} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{3}} 0dx + \int_{-\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(3x+2)^5}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}} \right]_{-\frac{1}{3}}^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(3b+2)^2}} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X < -1) = 0$;

iii) calcolare la probabilità $P(X > 2)$:

$$P(X > 2) = \int_2^{+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(3x+2)^5}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}} \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(3b+2)^2}} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

2) In una scatola ci sono 12 ovetto di cioccolato, 8 di peso 5 g e 4 di peso 6 g. Mangiandone 3 a caso

i) quale è la probabilità P_1 di avere mangiato 16 g di cioccolato? $\frac{\binom{8}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{28}{55}$

ii) Quale è la probabilità P_2 di avere mangiato 18 g di di cioccolato? $\frac{\binom{8}{0}\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{55}.$

3) La ditta C.D. vende scatole di volume rappresentabile con una variabile aleatoria X con distribuzione normale di media $\mu = 3.6 \text{ dm}^3$ e deviazione standard $\sigma = 0.25 \text{ dm}^3$.

i) Qual è la probabilità $P_1 = P(X > 3.7)$ che una scatola presa a caso abbia un volume maggiore di 3.7 dm^3 ?

$$P\left(\frac{3.7-3.6}{0.25} = 0.4 < \frac{X-3.6}{0.25} = Y\right) = 1 - P(Y < 0.4) \simeq 1 - 0.655 = 0.345$$

ii) Qual è la probabilità $P_2 = (X < 3.5)$ che il volume medio \bar{X} di 25 scatole prese a caso sia minore di 3.5 dm^3 ?

$$P(\bar{X} < 3.5) = P\left(\frac{\bar{X}-3.6}{\frac{0.25}{\sqrt{25}}} < \frac{3.5-3.6}{\frac{0.25}{\sqrt{25}}} = -2\right) = 1 - P(Y < 2) \simeq 1 - 0.977 = 0.023$$

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 8% ha sensibilità pari al 92% e specificità pari al 99%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$$P = P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M)+(1-P(Neg|S))(1-P(M))} = \frac{0.92 \cdot 0.08}{0.92 \cdot 0.08 + 0.01 \cdot 0.92} = \frac{8}{9}$$

Qual è la probabilità $P(Pos)$ che, sottoponendo al test un individuo qualunque, il test risulti positivo?

$$P(Pos) = P(Pos|M)P(M) + (1 - P(Neg|S))(1 - P(M)) = 0.92 \cdot 0.08 + 0.01 \cdot 0.92 = 0.0828$$