

Statistica (I Parte)
Corso di Laurea in Scienze Naturali
 17 Febbraio 2003

1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}} & \text{per } x \geq 1 \end{cases} .$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X ;

a) $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^{+\infty} \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{\sqrt[3]{2x-1}} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{2b-1}} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X > 0)$;

iii) calcolare la probabilità $P(X < 14)$

$$P(X < 14) = \int_{-\infty}^{14} f(x)dx = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^{14} \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}} dx = \left[\frac{-1}{\sqrt[3]{2x-1}} \right]_1^{14} = \frac{2}{3}.$$

2) In un laghetto ci sono 20 pesci, 15 di peso intorno ad 1 kg, 5 di peso intorno ai 2 kg. Pescandone due,

i) quale è la probabilità P_1 di avere pescato 4 kg di pesce? $\frac{\binom{15}{0}\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{19}$

ii) Quale è la probabilità P_2 di avere pescato 3 kg di pesce? $\frac{\binom{15}{1}\binom{5}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{15}{38}$

iii) Qual è il peso μ (in kg) che ci si può aspettare di pescare?

$$4 \bullet \frac{1}{19} + 3 \bullet \frac{15}{38} + 2 \bullet \left(1 - \left(\frac{1}{19} + \frac{15}{38} \right) \right) = 2.5$$

3) La ditta Galia vende caramelle agli agrumi in pacchetti che ne contengono una quantità il cui peso rappresentabile con una variabile aleatoria X con distribuzione normale di media $\mu = 37$ g e deviazione standard $\sigma = 0.8$ g.

i) Qual è la probabilità $P_1 = P(X < 36.5)$ che un pacchetto di caramelle preso a caso pesi meno di 36.5 g?

$$P(X < 36.5) = P(Y < \frac{36.5-37}{0.8} = -0.625 \simeq -0.63) = 1 - P(Y < 0,63) \simeq 1 - 0.736 = 0.264$$

ii) Qual è la probabilità $P_2 = P(37 < \bar{X} < 37.1)$ che il peso medio \bar{X} di 100 pacchetti presi a caso sia compreso tra 37 g e 37.1 g?

$$P(37 < \bar{X} < 37.1) = P\left(\frac{37-37}{0.08} = 0 < \frac{\bar{X}-37}{0.08} < \frac{37.1-37}{0.08} = 1.25\right) \simeq 0.894 - 0.5 = 0.394$$

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 3% ha sensibilità pari al 97% e specificità pari al 98%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$$P = P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M) + (1-P(Neg|S))(1-P(M))} = \frac{0.97 \cdot 0.03}{0.97 \cdot 0.03 + 0.02 \cdot 0.97} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Qual è la probabilità $P(Neg)$ che, sottoponendo al test un individuo qualunque, il test risulti negativo?

$$P(Neg) = P(Neg|M)P(M) + P(Neg|S)P(S) = (1 - P(Pos|M))P(M) + P(Neg|S)P(S)(1 - P(M)) = 0.03 \cdot 0.03 + 0.97 \cdot 0.98 = .9515$$

E se l'individuo è sano, che probabilità P' ha di risultare negativo?

$$P' = P(Neg|S) = 98\%.$$