1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{3}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}} & \text{per} \quad x > 1 \end{cases}.$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X:
a) $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\frac{3}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$;
b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}} dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{\left(\sqrt{(2x-1)}\right)^3} \right]_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{(2b-1)}\right)^3} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X > 0) := \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}} dx = 1;$

iii) calcolare la probabilità $P(X < 5) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{5} \frac{3}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}} dx = \left[\frac{-1}{\left(\sqrt{(2x-1)}\right)^3} \right]_1^5 = \frac{26}{27}.$

2) In un banchetto al mercato sono in vendita 10 costumi da mare, 4 dei quali sono difettati. Scegliendone 2 a caso,
i) qual è la probabilità P_1 di averli presi senza difetti?
È un caso di distribuzione ipergeometrica, con $N = 10$, $K = 4$, $n = 2$, $k = 0$, quindi $P_1 = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$.
ii) Qual è la probabilità P_2 di averne preso solo uno difettato?
Sempre distribuzione ipergeometrica, con $N = 10$, $K = 4$, $n = 2$, $k = 1$, quindi $P_2 = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}$.

3) La ditta Elgida vende gelati confezionati, il cui peso è rappresentabile con una variabile aleatoria X che ha distribuzione normale di media 65 gr e deviazione standard di 1.6 gr.
i) Qual è la probabiltà $P(X > 66.2)$ che il peso di un gelato preso a caso sia più di 66.2 gr?
$P(X > 66.2) = P(Y > \frac{66.2-65}{1.6} = 0.75) = 1 - P(Y < 0.75) \simeq 1 - 0.7734. =0.2266$
ii) Qual è la probabilità $P(63 < X < 65)$ che il il peso di un gelato preso a caso sia più di 63 gr e meno di 65 gr?

$P(63 < X < 65) = P(X < 65) - P(X < 63) = 0.5 - P(Y < \frac{63-65}{1.6} = -1.25) = 0.5 - (1 - P(Y < 1.25)) \simeq 0.8944 - 0.5 = 0.3444.$

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 3% ha sensibilità pari al 97% e specificità pari al 94%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$$P = P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M) + (1 - P(Neg|S))\,(1 - P(M))} = \frac{0.97\cdot 0.03}{0.97\cdot 0.03+0.06\cdot 0.97} = \frac{1}{3}.$$

Qual è la probabilità $P(Pos|S)$ che, sottoponendo al test un individuo sano, il test risulti positivo?
$P(Pos|S) = 1 - P(Neg|S) = 1 - 0.94 = 0.06.$