COGNOME...NOME............................MATR. . . . .

Statistica (I Parte)
Corso di Laurea in Scienze Naturali
17 Giugno 03

1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < -1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^4}} & \text{per} \quad x \geq -1 \end{cases} .$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X;

a) $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^4}} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx + \int_{-1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^4}} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{-1}{\sqrt[3]{(3x+4)}} \right]_{-1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(3b+4)}} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X < -10) = 0$

iii) calcolare la probabilità $P(X > \frac{4}{3})$:

$.P(X > \frac{4}{3}) = \int_{\frac{4}{3}}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^4}} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{-1}{\sqrt[3]{(3x+4)}} \right]_{\frac{4}{3}}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(3b+4)}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2) In un congelatore ci sono 12 gelati, 10 di peso 80 g e 2 di peso 100 g. Mangiandone 3 a caso

i) quale è la probabilità P_1 di avere mangiato 280 g di gelato? $\frac{\binom{2}{2}\binom{10}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{22}$

ii) Quale è la probabilità P_2 di avere mangiato 240 g di gelato? $\frac{\binom{2}{1}\binom{10}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{9}{22}$

3) La ditta Colvè vende maionese in vasetti il cui contenuto è rappresentabile con una variabile aleatoria X con distribuzione normale di media $\mu = 200$ g e deviazione standard $\sigma = 7.5$ g.

i) Qual è la probabilità $P_1 = P(X > 203)$ che un vasetto preso a caso contenga più di 203 g di maionese?

$P(X > 203) = P(Y > \frac{203-200}{7.5} = 0.4) = 1 - P(Y < 0.4) \simeq 1 - 0.655 = 0.345$

ii) Qual è la probabilità $P_2 = (\bar{X} < 199)$ che il contenuto medio $\bar{X}$ di 25 vasetti presi a caso sia minore di 199 g?

$P(\bar{X} < 199) = P(\frac{\bar{X}-200}{1.5} < \frac{199-200}{1.5} \simeq -0.67) = 1 - P(Y < 0.67) \simeq 1 - 0.749 = 0.251$

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 3% ha sensibilità pari al 97% e specificità pari al 95%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$P = P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M)+(1-P(Neg|S))(1-P(M))} = \frac{0.97 \cdot 0.03}{0.97 \cdot 0.03 + 0.05 \cdot 0.97} = \frac{3}{8}.$

Qual è la probabilità P' che, sottoponendo al test un individuo sano, il test risulti positivo?$P' = P(Pos|S) = 1 - P(Neg|S) = 0.05.$