1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < -\frac{1}{3} \\ \dfrac{4}{(3x+2)^{\frac{7}{3}}} & \text{per} \quad x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} .$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X:

a) $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\frac{4}{(3x+2)^{\frac{7}{3}}} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$;

b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{3}} 0dx + \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{4}{(3x+2)^{\frac{7}{3}}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3x+2)}\right)^4} \right]_{-\frac{1}{3}}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3b+2)}\right)^4} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X > -\frac{1}{2}) := \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{3}} 0dx \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{4}{(3x+2)^{\frac{7}{3}}}dx = 1.$

iii) calcolare la probabilità $P(X < 2)$: $P(X < 2) = \int\limits_{-\infty}^{2} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{3}} 0dx + \int\limits_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{4}{(3x+2)^{\frac{7}{3}}}dx =$

$\left[\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3x+2)}\right)^4} \right]_{-\frac{1}{3}}^{2} = \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(6+2)}\right)^4} + 1 = \frac{15}{16}.$

2) Inserendo un gettone da 10 euro in una slot machine, compaiono sullo schermo 3 figure ognuna scelta tra le possibili seguenti: mela, banana, ciliegia, pera. Si vincono 40 euro se le 3 figure che appaiono sono uguali, 8 euro se solo 2 sono uguali, nulla se sono tutte diverse. Giocando un gettone,

i) quale è la probabilità P_1 di non vincere nulla? Casi possibili: disposizione con ripetizione 4,3 $=4^3 = 64$, casi favorevoli: disposizione senza ripetizione 4,3 $= 4 \cdot 3 \cdot 2$, $P_1 = \frac{3}{8}$.

ii) Quale è la probabilità P_2 di vincere 40 euro? Casi possibili: disposizione con ripetizione 4,3 $=4^3 = 64$, casi favorevoli: 4, $P_2 = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$.

iii) In media, giocando un gettone si guadagna, si perde o si va a pari?
valor medio vincita$=\mu = 0 \cdot \frac{3}{8} + 40 \cdot \frac{1}{16} + 8 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{16}\right)\right) = 7$, quindi in media si perde.

3) La ditta Palmara vende tonno in scatole il cui peso è rappresentabile con una variabile aleatoria X con distribuzione normale di media $\mu = 80$ g e deviazione standard $\sigma = 0.4$g.

i) Qual è la probabilità $P_1 = P(X > 80.5)$ che una scatola di tonno presa a caso pesi piùdi 80.5 g?$P_1 = P(X > 80.5) = P(Y > \frac{80.5-80}{0.4} = 1.25) = 1 - P(Y < 1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056.$

ii) Qual è la probabilità $P_2 = P(79.7 < X < 80)$ che una scatola di tonno presa a caso pesi più di 79.7 g e meno di 80 g?

$P_2 = P(79.7 < X < 80) = P(X < 80) - P(X < 79.7) = P(Y < \frac{80-79.7}{0.4} = 0.75) - 0.5 = 0.7734 - 0.5 = 0.2234.$

iii) Qual è la probabilità $P_3 = P(X = 80)$ che un panetto di burro preso a caso pesi esattamente 80 g? $P_3 = 0$ (X è una v.a.continua!).

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 8% ha sensibilità pari al 92% e specificità pari al 96%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$$P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M) + P(Pos|S)P(S)} = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M) + (1 - P(Neg|S))\,(1 - P(M))} =$$

$\frac{0.92 \cdot 0.08}{0.92 \cdot 0.08 + 0.04 \cdot 0.92} = \frac{8}{12} \sim 0.67.$

Qual è la probabilità $P(Pos)$ che, sottoponendo al test un individuo qualunque, il test risulti positivo?

$P(Pos) = P(Pos|M)P(M) + P(Pos|S)P(S) = 0.92 \cdot 0.08 + 0.04 \cdot 0.92 = 0.92 \cdot 0.12 \sim 0.11.$