1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < 0 \\ \frac{4}{\sqrt[3]{(3x+1)^7}} & \text{per} \quad 0 \leq x \end{cases},$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X.

$a)$ $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\frac{4}{\sqrt[3]{(3x+1)^7}} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$;

$b)$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{(3x+1)^7}}dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3x+1)}\right)^4} \right]_0^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3b+1)}\right)^4} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X < \frac{7}{3})$.

$P(X < \frac{7}{3}) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{7}{3}} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\frac{7}{3}} \frac{4}{\sqrt[3]{(3x+1)^7}}dx = \left[\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3x+1)}\right)^4} \right]_0^{\frac{7}{3}} = \frac{15}{16}.$

ii) **Facoltativo**: calcolare (per parti) il valor medio $E(X)$ della v.a. X.

$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{4x}{\sqrt[3]{(3x+1)^7}}dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{4x}{\sqrt[3]{(3x+1)^7}}dx = \lim\limits_{b \to +\infty} [x \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3x+1)}\right)^4}$

$- \int \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{(3x+1)}\right)^4}dx]_0^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[\frac{-x}{\left(\sqrt[3]{(3x+1)}\right)^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)}} \right]_0^b = \lim\limits_{b \to +\infty} -\frac{+4b+1}{\left(\sqrt[3]{(3b+1)}\right)^4} + 1 = 1.$

2) Un giocatore di freccette in un lancio vince X punti in un lancio con questa distribuzione di probabilità:

X	0	1	2	3	4
p_X	0.2	0.1	0.4	0.1	0.2

i) Qual è il punteggio atteso μ in un lancio? : $\mu = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 = 2.$

ii) Qual è la probabilità P_1 che vinca 0 punti in 3 lanci?

È una distribuzione binomiale, con $p = 0.2$, $n = 3$, $k = 3$, $p = 0.2 : P_1 = \binom{3}{3} (0.2)^3 (0.8)^0 = 0.00\,8.$

iii) Qual è la probabilità P_2 che vinca almeno 1 punto in 3 lanci?

È la probabilità dell'evento complementare al precedente, quindi $P_2 = 1 - 0.008 = 0.992$.

3) La ditta Mar Nero vende profumo confezionato in boccette, il cui contenuto è rappresentabile con una variabile aleatoria X con distribuzione normale di media 50 cl e deviazione standard 0.8 cl.

i) Qual è la probabiltà $P_1 = P(X < 49)$ che il profumo contenuto in una boccetta presa a caso sia meno di 49 cl?

$P_1 = P(X < 49) = P(Y < \frac{49-50}{0.8} = -1.25) = 1 - P(Y < 1.25) \simeq 1 - 0.8944 = 0.\,105\,6.$

ii) Qual è la probabilità $P_2 = P(50 < X < 52)$ che il profumo contenuto in una boccetta presa a caso sia più di 50 cl e meno di 52 cl ?

$P_2 = P(50 < X < 52) = P(X < 52) - P(X < 50) = P(Y < \frac{52-50}{0.8} = 2.5) - 0.5 \simeq 0.9938 - 0.5 = 0.493\,8.$

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 6% ha sensibilità parial 94% e specificità pari al 98%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$$P = P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M) + (1 - P(Neg|S))\,(1 - P(M))} = \frac{0.94 \cdot 0.06}{0.94 \cdot 0.06 + 0.02 \cdot 0.94} = \frac{6}{8} = 0.75.$$

Qual è la probabilità che, sottoponendo al test un individuo malato, il test risulti negativo: $P(Neg|M) = 1 - P(Pos|M) = 1 - 0.94 = 0.06$

e quale la probabilità che, sottoponendo al test un individuo qualunque, il test risulti negativo?

$P(Neg) = P(Neg|S)P(S) + P(Neg|M)P(M) = 0.98 \cdot 0.94 + 0.06 \cdot 0.06 = 0.924\,8.$