Statistica (I Parte)-Corso di Laurea in Scienze Naturali
30 Gennaio 2003

1) Data

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < 0 \\ \frac{3}{(1+2x)^{\frac{5}{2}}} & \text{per} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X;

$a)$ $f(x) \geq 0, \forall x$, in quanto $\frac{3}{(1+2x)^{\frac{5}{2}}} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$;

$b)$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{3}{(1+2x)^{\frac{5}{2}}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{\left(\sqrt{(1+2x)}\right)^3} \right]_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{(1+2x)}\right)^3} + 1 = 1.$

ii) calcolare la probabilità $P(X < -1) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0dx = 0$;

iii) calcolare la probabilità $P(X > \frac{3}{2}) = \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{3}{(1+2x)^{\frac{5}{2}}}dx = \frac{1}{8}$.

2) In un borsellino ci sono 6 monete, 4 di valore 1 euro e 2 di valore 2 euro. Prendendo a caso 2 monete dal borsellino,

i) quale è la probabilità P_1 di avere 4 euro?

Per avere 4 euro, necessariamente devo avere estratto 2 monete da 2 euro, quindi è un caso di distribuzione ipergeometrica, con $N = 6$, $K = 2$ (monete da 2 euro), $n = 2$, $k = 2$ quindi $P_1 = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$.

ii) Quale è la probabilità P_2 di avere 3 euro?

È un caso di distribuzione ipergeometrica, con $N = 6$, $K = 2$ (monete da 2 euro), $n = 2$, $k = 1$ quindi $P_2 = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$.

iii) qual è il valore μ (approssimato ai centesimi di euro) che ci si può aspettare di avere?

Per calcolare il valore atteso, abbiamo bisogno delle probabilità per i possibili valori, cioè per 4,3,2 euro. Ci manca solo quella dei 2 euro, che possiamo ottenere per differenza: $1 - \left(\frac{1}{15} + \frac{8}{15}\right) = \frac{2}{5}$. Avremo allora che $\mu = 4 \bullet \frac{1}{15} + 3 \bullet \frac{8}{15} + 2 \bullet \frac{2}{5} = \frac{8}{3} \simeq 2.67$.

3) La ditta Deor vende rossetti per labbra in stick, il cui peso è rappresentabile con una variabile aleatoria X con distribuzione normale di media $\mu = 20$ g e deviazione standard $\sigma = 0.4$ g.

i) Qual è la probabilità $P_1 = P(X < 19.9)$ che uno stick di rossetto preso a caso pesi meno di 19.9 g?

$P(X < 19.9) = P(Y < \frac{19.9-20}{0.4} = -0.25) = 1 - P(Y < 0,25) \simeq 1 - 0,5987 = 0,4013$

ii) Qual è la probabilità $P_2 = P(20 < X < 20.3)$ che uno stick di rossetto preso a caso pesi più di 20 g e meno di 20.3 g?

$P(20 < X < 20.3) = P(0 < Y < \frac{20.3-20}{0.4} = 0.75) \simeq 0.7734 - 0.5 = .2734$.

iii) Qual è la probabilità $P_3 = P(X = 25)$ che uno stick di rossetto preso a caso pesi esattamente 25 g? Poiché X è una v.a. continua, $P_3 = 0$.

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 4% ha sensibilità pari al 96% e specificità pari al 99%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$P = P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M)+(1-P(Neg|S))(1-P(M))} = \frac{0.96 \cdot 0.04}{0.96 \cdot 0.04 + 0.01 \cdot 0.96} = \frac{4}{5} = 0.8$

Qual è la probabilità $P(Pos)$ che, sottoponendo al test un individuo qualunque, il test risulti positivo?

$P(Pos) = P(Pos|M)P(M) + P(Pos|S)P(S) = 0.96 \cdot 0.04 + 0.01 \cdot 0.96 = .048$

E se l'individuo è sano, che probabilità P' ha di risultare positivo?

$P' = P(Pos|S) = 1 - P(Neg|S) = 1 - 0.99 = 0.01.$