COGNOME..NOME.............................MATR. . . . .

Statistica (I Parte)
Corso di Laurea in Scienze Naturali
30 Giugno 03

1) Data

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{per} \quad x<-2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x+5)^5}} & \text{per} \quad x\geq -2 \end{cases} .$$

i) verificare che è una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X;

a) $f(x)\geq 0, \forall x$, in quanto $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x+5)^5}}>0 \Leftrightarrow x>-\frac{5}{2}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-2} 0dx+\int_{-2}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x+5)^5}}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt[4]{(2x+5)}}\right]_{-2}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt[4]{(2b+5)}}+1=1.$

ii) calcolare la probabilità $P(-100<X<-2)=0$;

iii) calcolare la probabilità $P(X<\frac{11}{2})$:

$P(X<\frac{11}{2})+\int_{-\infty}^{-2} 0dx+\int_{-2}^{\frac{11}{2}}\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x+5)^5}}dx=\left[\frac{-1}{\sqrt[4]{(2x+5)}}\right]_{-2}^{\frac{11}{2}}=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$

2) Da un cassetto contenente 12 matite colorate, di cui 3 rosse, Mario estrae senza guardare 2 matite.

i) Qual è la probabilità P_1 che Mario ne abbia estratte 2 rosse? $\frac{\binom{3}{2}\binom{9}{0}}{\binom{12}{2}}=\frac{1}{22}$

ii) Qual è il valore atteso μ di matite rosse che Mario si può aspettare di estrarre?

$\frac{\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{12}{2}}=\frac{9}{22}, \mu=0\bullet\left(1-\left(\frac{9}{22}+\frac{1}{22}\right)\right)+1\bullet\frac{9}{22}+2\bullet\frac{1}{22}=\frac{1}{2}$

ii) Qual è la probabilità P_2 che, ripetendo 3 volte questa estrazione (rimettendo ogni volta le matite nel cassetto), Mario estragga tutte le volte 2 matite rosse?

Binomiale di parametri $p=\frac{1}{22}$, $n=3$, $k=3:P_2=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{22}\right)^3\left(\frac{21}{22}\right)^0=\left(\frac{1}{22}\right)^3=\frac{1}{10\,648}$

3) La ditta MC produce viti la cui lunghezza è rappresentabile con una variabile aleatoria X di distribuzione normale di media $\mu=2.5$ cm e deviazione standard $\sigma=0.25$ cm.

i) Qual è la probabilità P_1 che una vite presa a caso sia più lunga di 2.52 cm?

$P(X>2.52)=P(Y>\frac{2.52-2.5}{0.25}=0,08)=1-P(Y<0,08)\simeq 1-0.532=0.468.$

ii) Qual è la probabilità P_2 che la lunghezza media $\bar{X}$ di 100 viti prese a caso si discosti dalla media per meno di 0.01 cm?

$P(2.49<\bar{X}<2.51)=P(\frac{2.49-2.5}{0.025}=-0.4<Y<\frac{2.51-2.5}{0.025}=0.4)=2P(0<Y<0.4)=2\left(P(Y<0.4)-0.5\right)\simeq 2(0.655-0.5)=0.31.$

4) Un test diagnostico per la malattia M con incidenza del 7% ha sensibilità pari al 93% e specificità pari al 99%. Il test applicato ad un individuo a caso ha dato esito positivo. Calcolare la probabilità P che quel soggetto sia veramente malato.

$P=P(M|Pos)=\frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos|M)P(M)+(1-P(Neg|S))(1-P(M))}=\frac{0.93\cdot 0.07}{0.93\cdot 0.07+0.01\cdot 0.93}=\frac{7}{8}$

Qual è la probabilità P' che, sottoponendo al test un individuo, il test risulti negaticvo?

$P'=P(Neg)=P(Neg|S)P(S)+P(Neg|M)P(M)=0.99\cdot 0.93+0.07\cdot 0.07=0.9256.$