

Appunti, *molto preliminari*,
di Analisi Matematica 4

GM

13 Marzo 2009

+

+

+

+

+

+



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License. This means that: (Attribution) You must give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use. (NonCommercial) You may not use the material for commercial purposes. (NoDerivatives) If you remix, transform, or build upon the material, you may not distribute the modified material.

+

+

+

+

Indice

Notazioni	1
Capitolo 1. Prerequisiti	3
1.1. Funzioni analitiche reali	3
1.2. Disuguaglianze	4
1.3. Famiglie dense di funzioni negli spazi L^p	6
1.4. Convolutioni	11
1.5. Mollificatori	16
1.6. Separazione delle variabili: presupposti teorici	18
1.7. Relazioni integrali	20
Capitolo 2. Funzioni armoniche in \mathbb{R}^2	21
2.1. Armonica coniugata	22
2.2. Olomorfa associata	23
2.3. Conseguenze	23
2.4. Funzioni armoniche in coordinate polari	28
2.5. Applicazioni della formula di Poisson	35
Capitolo 3. Funzioni armoniche in \mathbb{R}^n	38
3.1. Regolarità	42
3.2. Formula di Poisson	50
3.3. Bolla unitaria	55
3.4. Semispazio	58
3.5. Unicità della soluzione con il metodo dell'integrale di energia	60
3.6. Soluzione mediante un principio variazionale	60
3.7. Possibili argomenti di approfondimento:	62
Capitolo 4. Equazione dei processi diffusivi	64
4.1. Problema di Cauchy sul segmento	65
4.2. Soluzione fondamentale	70
4.3. Problema di Cauchy in \mathbb{R}^n	72
4.4. Principio del massimo	75
4.5. Unicità della soluzione del problema di Cauchy	77
4.6. Unicità con stime di energia	80

+

+

+

+

INDICE	III
4.7. L'esempio di Tychonoff	82
Capitolo 5. Soluzioni deboli: il teorema di Lax-Milgram	85
Appendice. Letture consigliate	95
Appendice. Indice analitico	97

+

+

+

+

+

+

+

+

Notazioni

- I vettori di \mathbb{R}^n e le funzioni a valori in \mathbb{R}^n sono indicate in grassetto, per cui si dirà $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ed $\mathbf{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Saranno indicati in corsivo invece gli elementi di \mathbb{R} e le funzioni a valori scalari.
- $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ indicano la base standard di \mathbb{R}^n .
- \mathbf{i}, \mathbf{j} è una notazione alternativa per la base standard di \mathbb{R}^2 , $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ è una notazione alternativa per quella di \mathbb{R}^3 .
- Data $\mathbf{F}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, indichiamo con F_1, \dots, F_n i coefficienti della decomposizione di \mathbf{F} sulla base canonica: $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + \dots + F_n\mathbf{e}_n$.
- I vettori di \mathbb{R}^n sono indicati come vettori colonna e gli operatori agiscono a sinistra, quindi il valore di un operatore lineare T su di un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ è indicato con $T\mathbf{v}$. Il prodotto scalare tra due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} è indicato con $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
- Coerentemente con quanto detto precedentemente, il gradiente ∇f di una funzione f è un vettore riga.
- Per maggiore leggibilità nelle formule inserite nel testo ed in altre rare occasioni (e comunque quando ciò non sarà fonte di confusione alcuna), rappresenteremo i vettori di \mathbb{R}^n come vettori riga. Scriveremo ad esempio ‘... il punto $(-2, 3)$...’ anziché ‘... il punto $(-2, 3)^\top$...’.
- Per le derivate parziali useremo indifferentemente le notazioni seguenti:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \partial_x f(x, y) = \partial_1 f(x, y)$$

e per le derivate parziali successive useremo quindi indifferentemente le notazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(k)} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} &= \frac{\partial^{(k)} f}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}(x_1, \dots, x_n) = \partial_{x_1 \cdots x_k}^{(k)} f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \partial_{1 \cdots k}^{(k)} f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

- Talvolta sarà utile indicare il valore di una funzione in un punto oltre con l’usuale notazione $f(x, y)$ anche col simbolo

$$f|_{(x,y)}.$$

+

+

+

+

- \bar{E} , $\overset{\circ}{E}$ e ∂E sono rispettivamente la chiusura, la parte aperta ed il bordo di un insieme E .
- La bolla aperta di raggio r e centro \mathbf{p} è indicata con $B_r(\mathbf{p})$ così che $B_r(\mathbf{p}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < r\}$. Se \mathbf{p} è l'origine indicheremo tale bolla anche con il simbolo B_r .
- Il bordo della bolla aperta di raggio r e centro \mathbf{p} in \mathbb{R}^n è indicato con $S_r^{n-1}(\mathbf{p})$ così che $S_r^{n-1}(\mathbf{p}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{p}| = r\}$. Se \mathbf{p} è l'origine indicheremo tale bordo anche con il simbolo S_r^{n-1} .
- Il semipiano aperto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ è indicato con Π_n^+ , analogamente per il semipiano aperto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$ usiamo la notazione Π_n^- .
- χ_E è la funzione caratteristica dell'insieme E : $\chi_E(x)$ vale 1 se $x \in E$, altrimenti vale 0.
- \mathcal{C} , \mathcal{C}^n , \mathcal{C}^∞ indicano rispettivamente gli insiemi delle funzioni continue, delle funzioni derivabili n volte con derivata n -esima continua e delle funzioni derivabili ad ogni ordine.
- \mathcal{C}_c , \mathcal{C}_c^n , \mathcal{C}_c^∞ indicano le varianti a supporto compatto degli insiemi di funzioni qui sopra ricordato.
- $L^p(E)$ è lo spazio delle funzioni Lebesgue p integrabili in E .
- $\tau_{\mathbf{h}}$ è l'operatore di shift, che agisce sulle funzioni nel modo seguente: $(\tau_{\mathbf{h}}f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{h})$.
- ∇ , div , rot e Δ sono gli operatori differenziali gradiente, divergenza, rotore e laplaciano.
- $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\nu}$ sono i versori tangente e normale associati rispettivamente ad una curva e ad una superficie.
- ds , $d\sigma$ e $d\mu_V$ indicano la misura intrinseca su una curva, su una superficie e su una generica varietà V , rispettivamente.

+

+

+

+

CAPITOLO 1

Prerequisiti

1.1. Funzioni analitiche reali

Un vettore $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di interi non negativi è detto *multiindice* e l'intero $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ad esso associato è detto *ordine*. È utile introdurre le notazioni

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n! \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Se poi f è una funzione definita in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori reali, si utilizza il simbolo $\partial^\alpha f$ per indicare la derivata parziale

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f.$$

Def. 1.1 Una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω aperto è detta *analitica* (in senso reale) in Ω se per ogni $\mathbf{p} \in \Omega$ esiste una bolla $B_r(\mathbf{p})$ in cui f ammette una rappresentazione

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (\mathbf{x} - \mathbf{p})^\alpha$$

con a_α costanti reali opportune.

Procedendo come nel caso monodimensionale si dimostra che se f è analitica allora è anche di classe \mathcal{C}^∞ , con

$$a_\alpha = \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{p})}{\alpha!} \quad \text{per ogni multiindice } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Ne segue che f è analitica in Ω se e solo se è $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e per ogni punto $\mathbf{p} \in \Omega$ la serie di potenze

$$(1.1) \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{p})}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{p})^\alpha$$

ha raggio di convergenza strettamente positivo. La serie di potenze che appare in (1.1) è detta *serie di Taylor* per f in \mathbf{p} . La convergenza della serie di potenze (assoluta ed uniforme nei compatti contenuti nella bolla aperta di convergenza) consente di riordinare la (1.1) come

$$(1.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{p}) (\mathbf{x} - \mathbf{p})^\alpha \right],$$

+

+

che mette in evidenza il contributo alla serie che proviene dai termini con medesimo ordine.

Si può dimostrare che una funzione $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se le due funzioni $g_R(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $g_I(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)$ sono analitiche reali in Ω e la serie di potenze

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}} \frac{\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} f(\mathbf{p})}{\alpha_1! \alpha_2!} (x - x_{\mathbf{p}})^{\alpha_1} (y - y_{\mathbf{p}})^{\alpha_2}$$

in cui si sostituisca x con $(z + \bar{z})/2$ ed y con $(z - \bar{z})/2i$ (e $x_{\mathbf{p}}$ con $(\mathbf{p} + \bar{\mathbf{p}})/2$ ed $y_{\mathbf{p}}$ con $(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})/2i$) diventa di fatto una serie di potenze della sola variabile $z - \mathbf{p}$.

1.2. Disuguaglianze

1.2.1. Disuguaglianza di Hölder.

Lemma 1.1 *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $p, q \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (con $q = \infty$ se $p = 1$ e viceversa). Allora $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.*

Dim. La disuguaglianza è in realtà una versione “raffinata” di una semplice disuguaglianza tra reali non negativi nota col nome di disuguaglianza di Young:

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \forall u, v \in [0, +\infty), \quad p, q \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Veniamo ora alla dimostrazione della tesi. Essa è facilmente dimostrata se $p = 1$ o $q = 1$, nonché se $\|f\|_p = 0$ oppure se $\|g\|_q = 0$. Possiamo dunque immaginare che $p, q \in (1, +\infty)$ e $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$. Siano allora $\tilde{f} := f/\|f\|_p$, $\tilde{g} := g/\|g\|_q$ che ovviamente appartengono rispettivamente ad $L^p(\mathbb{R}^n)$ ed $L^q(\mathbb{R}^n)$ ed hanno norma 1. Dalla disuguaglianza di Young sopra ricordata si ha

$$|\tilde{f}(\mathbf{x})\tilde{g}(\mathbf{x})| \leq \frac{|\tilde{f}(\mathbf{x})|^p}{p} + \frac{|\tilde{g}(\mathbf{x})|^q}{q} \quad \text{quasi ovunque}$$

e quindi, per integrazione, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(\mathbf{x})\tilde{g}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} &\leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{p} \|\tilde{f}\|_p^p + \frac{1}{q} \|\tilde{g}\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

da cui la tesi segue semplicemente moltiplicando per $\|f\|_p \cdot \|g\|_q$. ■

1.2.2. Disuguaglianza triangolare per norme L^p .

Lemma 1.2 *Siano f e g in $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, +\infty]$. Allora $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Dim. La tesi è immediata per $p = \infty$. Assumiamo dunque che $p \in [1, +\infty)$. Si ha

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})| \cdot |f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})|^{p-1} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| \cdot |f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})|^{p-1} \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x})| \cdot |f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})|^{p-1} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Se $p = 1$ la relazione precedente già dà la tesi. Supponiamo dunque che $p > 1$. Applichiamo la disuguaglianza di Hölder a ciascuno degli integrali precedenti, con esponente p sul primo fattore (e quindi con esponente $q := p/(p-1)$ sul secondo) ottenendo

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q$$

ma $\| |f+g|^{p-1} \|_q = \|f+g\|_p^{p-1}$ e quindi

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p-1}.$$

Se $\|f+g\|_p$ fosse nullo la tesi sarebbe evidentemente vera, quindi possiamo supporre $\|f+g\|_p > 0$, ma allora la tesi segue dalla relazione precedente dividendo per $\|f+g\|_p^{p-1}$. ■

1.2.3. Disuguaglianza di convessità (o di Jensen). Sia $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora $\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y)$ per ogni x, y e per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Iterando tale disuguaglianza si ha che

$$(1.3) \quad \phi\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(x_j)$$

per ogni x_1, \dots, x_n e per ogni scelta dei parametri $\lambda_j \in [0, +\infty)$ presi nell'iperpiano $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Osserviamo che la somma $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ può essere interpretata come media del vettore $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ secondo i pesi $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Se indichiamo questa operazione con il simbolo $M_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$ la disuguaglianza di convessità può essere espressa dicendo che $\phi(M_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})) \leq M_{\boldsymbol{\lambda}}(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$. Questo modo di esprimere la convessità suggerisce estensioni interessanti; una di queste è la seguente. Osserviamo che data una qualsiasi funzione f di $L^1(\mathbb{R}^n)$ con norma 1, la mappa $A \rightarrow \int_A |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}$, dove A è un generico sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n , può essere interpretata come probabilità di A . Rispetto a tale interpretazione l'integrale $\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} =: M_f[g]$ viene quindi interpretato come media di g rispetto alla densità di probabilità $|f|$. La forma precedentemente data alla disuguaglianza di convessità suggerisce quindi che anche in questo contesto si abbia

$$\phi(M_f[g]) \leq M_f[\phi(g)]$$

ogni qualvolta i termini che compaiono in questa disuguaglianza siano ben definiti. In effetti ciò è proprio quanto afferma il seguente lemma, dovuto a Jensen.

Lemma 1.3 *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con norma 1, sia $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $g(\mathbf{x}) \in (a, b)$ per ogni \mathbf{x} . Sia infine $\phi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora*

$$\phi\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}\right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(g(\mathbf{x})) |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Dim. La tesi è sicuramente vera quando g è semplice (perché allora segue immediatamente dalla disuguaglianza (1.3)). La tesi nella sua generalità è implicata da questa a seguito della definizione dell'integrale di Lebesgue come estremo superiore di integrali di opportune funzioni semplici. ■

Esempio 1.1 La mappa $x \rightarrow x^p$ è convessa in $[0, +\infty)$ per $p \geq 1$. Di conseguenza, per ogni coppia di funzioni $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e di norma 1 si ha

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x})|^p |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

1.3. Famiglie dense di funzioni negli spazi L^p

gli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$ devono la loro fortuna alla loro completezza quali spazi vettoriali normati. In tali spazi tuttavia ogni singola funzione in realtà non è una funzione bensì una classe di funzioni definite solo a meno di insiemi di misura nulla. Ne segue che gli oggetti di tali spazi possono comportarsi, dal punto di vista della regolarità, in modi decisamente “inconsueti”. Un esempio può illustrare la situazione: come elementi di $L^p(\mathbb{R})$ la funzione f costante uguale a zero e la funzione caratteristica dei razionali sono del tutto equivalenti, ovvero in L^p le classi $[f]$ e $[\chi_{\mathbb{Q}}]$ sono la medesima. È però evidente che l'utilizzo di f quale rappresentante della classe dovrebbe tradursi in una maggior semplicità di ragionamento rispetto all'uso della funzione $\chi_{\mathbb{Q}}$. Per tale motivo si rivela estremamente utile riuscire a determinare delle classi particolari di funzioni che da una parte siano “più semplici” della generica funzione di L^p , dall'altra siano “sufficientemente rappresentative” dell'intero spazio ambiente L^p . Un modo per soddisfare questa seconda richiesta è concentrarsi su classi di funzioni che risultino *dense* in L^p .

In questo capitolo dimostriamo come alcune classi di funzioni abbiano questa proprietà. Anzitutto ricordiamo le seguenti definizioni.

Def. 1.2 Le *funzioni semplici* su \mathbb{R}^n sono le funzioni che appartengono allo spazio vettoriale generato dalle funzioni χ_A al variare di A tra gli insiemi misurabili di \mathbb{R}^n .

Ogni funzione semplice può essere quindi scritta come

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{A_j}(\mathbf{x})$$

dove gli a_j sono numeri reali e gli A_j sono misurabili. Volendo, si può sempre fare in modo che gli a_j siano tra loro distinti e gli A_j disgiunti; con tale posizione la rappresentazione di s è unica.

Def. 1.3 Le *funzioni passo* su \mathbb{R}^n sono le funzioni che appartengono allo spazio vettoriale generato dalle funzioni χ_A al variare di A tra i rettangoli chiusi di \mathbb{R}^n .

Già nel processo che conduce alla costruzione dell'integrale di Lebesgue fanno la loro comparsa alcune famiglie di funzioni dense. Anzitutto dimostriamo il seguente risultato.

Lemma 1.4 *Le funzioni limitate ed a supporto limitato sono dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Dim. Infatti, sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia f_k la funzione definita da

$$f_k(\mathbf{x}) := \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } |f(\mathbf{x})| < k \text{ e } |\mathbf{x}| < k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ciascuna f_k è misurabile. Inoltre $|f_k(\mathbf{x})|^p \leq |f(\mathbf{x})|^p$ vale per ogni k e per ogni \mathbf{x} ed $|f|^p$ è per ipotesi integrabile. Per ogni \mathbf{x} fissato, poi, si ha evidentemente $f_k(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$ al divergere di k . Dal teorema di convergenza dominata segue quindi che $f_k \rightarrow f$ in L^p . Ciò dimostra appunto che le funzioni limitate ed a supporto limitato sono dense in ogni spazio L^p . ■

Si osservi che la tesi è invece falsa in L^∞ : le funzioni costanti e non nulle, infatti, appartengono a questo spazio ma non possono essere approssimate in norma $\|\cdot\|_\infty$ da funzioni a supporto limitato.

Lemma 1.5 *Le funzioni semplici ed a supporto limitato sono dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Dim. Visto il Lemma 1.4 possiamo limitarci a dimostrare che le semplici sono dense nel sottospazio delle funzioni limitate ed a supporto limitato. Sia dunque f limitata ed a supporto limitato. Sappiamo che sotto tali ipotesi esiste una successione di funzioni semplici ϕ_k con $|\phi_k(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x})|$ e convergenti ad f puntualmente. Il teorema di convergenza dominata garantisce che $\phi_k \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, ovvero la tesi. ■

Lemma 1.6 *Le funzioni passo sono dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Dim. Visto il Lemma 1.5 possiamo limitarci a dimostrare che le funzioni passo sono dense nel sottospazio delle funzioni semplici a supporto limitato. D'altra parte le funzioni semplici sono ottenute come combinazioni lineari delle funzioni caratteristiche di insiemi misurabili e limitati, quindi per avere la tesi basta dimostrare che ogni χ_A con A misurabile e limitato ammette una successione di funzione passo che converge (in norma $\|\cdot\|_p$) ad essa. Osserviamo che la limitatezza di A garantisce

che $\text{meas}(A) < +\infty$. È noto¹ che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una famiglia numerabile $\{Q_k\}_{k=0}^\infty$ di rettangoli compatti essenzialmente disgiunti (ovvero per i quali le intersezioni hanno misura nulla) e tali che $\text{meas}(E \triangle \bigcup_{k=1}^\infty Q_k) < \epsilon$. Esiste quindi un intero K tale che la funzione passo ϕ_ϵ definita ponendo $\phi_\epsilon(\mathbf{x}) := \sum_{k=0}^K \chi_{Q_k}(\mathbf{x})$ approssima χ_A in L^p a meno di 2ϵ . Visto che ϵ è arbitrario si ha la tesi. ■

Per ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ si definisce l'operatore di traslazione (anche detto *operatore di shift*) $\tau_{\mathbf{h}}$ che agisce in ciascun spazio di funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tramite la legge:

$$(\tau_{\mathbf{h}}f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{h}).$$

Nella loro dipendenza dal parametro \mathbf{h} gli operatori $\tau_{\mathbf{h}}$ costituiscono un gruppo abeliano; infatti è facile verificare che

$$\tau_{\mathbf{h}_1}\tau_{\mathbf{h}_2} = \tau_{\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2} \quad \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Ciò deriva dal fatto che per ogni funzione f si ha

$$(\tau_{\mathbf{h}_1}\tau_{\mathbf{h}_2}f)(\mathbf{x}) = [\tau_{\mathbf{h}_1}(\tau_{\mathbf{h}_2}f)](\mathbf{x}) = (\tau_{\mathbf{h}_2}f)(\mathbf{x} - \mathbf{h}_1) = f(\mathbf{x} - \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2) = \tau_{\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2}f(\mathbf{x})$$

Inoltre $\tau_{\mathbf{h}}$ si comporta come un'isometria negli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposizione 1.1 *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, +\infty]$ (quindi anche $L^\infty(\mathbb{R}^n)$). Allora $\tau_{\mathbf{h}}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|\tau_{\mathbf{h}}f\|_p = \|f\|_p$.*

Dim. Il caso $p = +\infty$ è evidente, visto che i valori assunti da g e da $\tau_{\mathbf{h}}g$ coincidono. Per $p \in [1, +\infty)$ basta osservare che a seguito del cambiamento di coordinate $\mathbf{x} - \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{y}$ si ha:

$$\|\tau_{\mathbf{h}}f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h})|^p d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{y})|^p d\mathbf{y} = \|f\|_p^p. \quad \blacksquare$$

Negli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$ con p finito, il gruppo ad un parametro degli operatori $\tau_{\mathbf{h}}$ dipende da \mathbf{h} con continuità; questo è ciò che afferma, in buona sostanza, la seguente proposizione.

Proposizione 1.2 *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, +\infty)$, allora $\tau_{\mathbf{h}}f$ è in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_p = 0.$$

Dim. La dimostrazione di questa affermazione costituisce un esempio di utilizzo delle famiglie dense di cui si è parlato in precedenza. Infatti, per ogni coppia di funzioni $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si ha che

$$\tau_{\mathbf{h}}f - f = (\tau_{\mathbf{h}}g - g) + \tau_{\mathbf{h}}(f - g) - (f - g).$$

¹E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton Lectures in Analysis III, Princeton, NJ, 2005, Teo. 3.4.

Dalla proprietà della norma e dalla Prop. 1.1 segue allora che

$$\|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_p \leq \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_p + \|\tau_{\mathbf{h}}(f - g)\|_p + \|f - g\|_p \leq \|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_p + 2\|f - g\|_p.$$

Fissiamo dunque f ed $\varepsilon > 0$. Cercando g in un sottospazio denso di $L^p(\mathbb{R}^n)$ possiamo (per definizione di densità) trovarne una per la quale si ha $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Se dunque sappiamo che $\|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_p \rightarrow 0$ per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}$, dalla disuguaglianza precedente seguirà che

$$\limsup_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_p \leq 2\varepsilon$$

e visto che ε è arbitrario possiamo concludere che anche $\|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_p$ tende a zero per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}$.

Applichiamo ora questo principio usando quale spazio denso quello costituito dalle funzioni passo (vd. Lemma 1.6). Dobbiamo quindi dimostrare che per ogni funzione passo g , si ha $\|\tau_{\mathbf{h}}g - g\|_p \rightarrow 0$ per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}$. In realtà le funzioni passo sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di rettangoli. Per linearità, quindi, possiamo limitarci a dimostrare la tesi nell'ipotesi che g sia una di tali funzioni caratteristiche: la tesi per la generica funzione passo seguirà per linearità.

Sia dunque χ_Q con Q rettangolo e sia $\mathbf{h} := (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ il vettore di traslazione. Per ogni k sia $\mathbf{h}_k := \sum_{j=1}^k h_j \mathbf{e}_j$, con $\mathbf{h}_0 := \mathbf{o}$. L'operatore di traslazione $\tau_{\mathbf{h}}$ può essere decomposto nella seguente somma di operatori

$$\tau_{\mathbf{h}} - \tau_{\mathbf{o}} = (\tau_{\mathbf{h}_1} - \tau_{\mathbf{h}_0}) + (\tau_{\mathbf{h}_2} - \tau_{\mathbf{h}_1}) + (\tau_{\mathbf{h}_3} - \tau_{\mathbf{h}_2}) + \dots + (\tau_{\mathbf{h}_n} - \tau_{\mathbf{h}_{n-1}})$$

in cui in ciascun termine i due addendi differiscono uno dall'altro solamente per una traslazione lungo uno degli assi. Tale decomposizione e la disuguaglianza triangolare danno

$$\|\tau_{\mathbf{h}}f - f\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|\tau_{\mathbf{h}_k}f - \tau_{\mathbf{h}_{k-1}}f\|_p.$$

Per avere la tesi basta quindi dimostrare che ciascuna norma $\|\tau_{\mathbf{h}_j}f - \tau_{\mathbf{h}_{j-1}}f\|_p$ può essere reso arbitrariamente piccola pur di prendere \mathbf{h} sufficientemente piccolo. D'altra parte

$$\|\tau_{\mathbf{h}_k}f - \tau_{\mathbf{h}_{k-1}}f\|_p = \|\tau_{-\mathbf{h}_{k-1}}(\tau_{\mathbf{h}_k}f - \tau_{\mathbf{h}_{k-1}}f)\|_p = \|\tau_{\mathbf{h}_k - \mathbf{h}_{k-1}}f - f\|_p = \|\tau_{h_k \mathbf{e}_k}f - f\|_p$$

così che ci si è ricondotti a dover dimostrare la tesi per le funzioni χ_Q e per traslazioni che siano parallele agli assi. Sotto tale ipotesi la tesi è però facilmente verificabile, visto che se $Q = \times_{j=1}^n [a_j, b_j]$ e h è positivo, allora

$$\tau_{h\mathbf{e}_1}\chi_Q - \chi_Q = \chi_{Q_h^+} - \chi_{Q_h^-}$$

dove $Q_h^+ := [b_1, b_1 + h] \times_{j=2}^n [a_j, b_j]$ e $Q_h^- := [a_1, a_1 + h] \times_{j=2}^n [a_j, b_j]$ (analoghe espressioni per $h < 0$). Di conseguenza

$$\|\tau_{h\mathbf{e}_1}\chi_Q - \chi_Q\|_p = \|\chi_{Q_h^+} - \chi_{Q_h^-}\|_p \leq \|\chi_{Q_h^+}\|_p + \|\chi_{Q_h^-}\|_p = 2 \left(|h| \frac{\text{meas}(Q)}{b_1 - a_1} \right)^{1/p}$$

che evidentemente è una quantità che può essere resa arbitrariamente piccola prendendo $h \rightarrow 0$. ■

Il seguente esempio mostra che l'operatore τ_h non gode in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ della proprietà di continuità rispetto al parametro h .

Esempio 1.2 Data la funzione $g(x) := (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}(x)$, sia $g_n(x) := g(n(x - n))$ e sia $f(x) := \sum_{n=3}^{\infty} g_n(x)$. Osserviamo che g è supportata in $[-1, 1]$ e presenta un unico estremo in 0; i supporti delle g_n sono tra loro disgiunti se $n \geq 3$, quindi per ogni valore di x fissato esiste un unico $n = n(x)$ tale che $f(x) = g_n(x)$. A partire da questa osservazione è facile costruire il grafico di f : esso presenta massimi assoluti nei punti interi, con valore massimo pari ad 1. Inoltre, la funzione f vale zero al di fuori degli intervalli $(-1/n + n, n + 1/n)$ dove n è un intero ≥ 3 . Il fatto che tali intervalli si “stringano” al crescere di n fa sì che per ogni $h > 0$ esista n sufficientemente grande perché si abbia $f(n) = 1$ e $f(n - h) = 0$ (ad esempio basta prendere $n = 2 \lfloor 1/h \rfloor$). Ne segue che $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$ per ogni $h \neq 0$. □

Se di $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ consideriamo però il sottospazio delle funzioni *uniformemente* continue e limitate, allora la tesi vale. Infatti, se f è uniformemente continua e limitata, allora anche $\tau_h f$ lo è e dalla uniforme continuità di f segue che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $|h| < \delta$ allora

$$|(\tau_h f)(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ciò significa che $\|\tau_h f - f\|_\infty < \varepsilon$ quando $|h| < \delta$, ovvero che $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_\infty = 0$. Evidenziamo questo risultato per futuro utilizzo:

Proposizione 1.3 *Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua e limitata, allora*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_\infty = 0.$$

Si osservi che la tesi precedente si applica alle funzioni $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, visto che la compattezza del supporto garantisce la uniforme continuità di tali funzioni. Più in generale, essa si applica anche alle funzioni in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ (lo spazio delle funzioni continue che all'infinito tendono a zero), visto che tramite la compattificazione di Aleksandrov queste possono essere estese a funzioni (continue) sulla sfera di \mathbb{R}^{n+1} . Per motivo analogo la stessa proposizione si applica alle funzioni continue su \mathbb{R} e che siano periodiche.

Oss. 1.1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $\lim_{x \rightarrow -\infty} f =: \alpha_-$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f =: \alpha_+$, dove $\alpha_\pm \in \mathbb{R}$. Allora f è uniformemente continua. Esistono varie dimostrazioni di questo fatto; una di esse è la seguente. La funzione \arctan è uniformemente continua (perché è lipschitziana, data la limitatezza in \mathbb{R} della sua derivata). La funzione $g(x) := f(x) - [\alpha_+ + (\alpha_+ - \alpha_-)(\frac{1}{\pi} \arctan(x) - \frac{1}{2})]$ è continua e di fatto appartiene a $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Essa è quindi certamente uniformemente continua, per cui f stessa lo è (essendo $f(x) = g(x) + \alpha_+ + (\alpha_+ - \alpha_-)(\frac{1}{\pi} \arctan(x) - \frac{1}{2})$). □

1.4. Convolutioni

Sia $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si definisce la *convoluzione* $g * f$ di g con f , tramite la relazione

$$(g * f)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Sotto ipotesi così generali non possiamo garantire l'esistenza di $(g * f)(\mathbf{x})$ in ogni \mathbf{x} , tuttavia dimostreremo ora che tale oggetto esiste almeno come elemento di $L^p(\mathbb{R}^n)$ e quindi è certamente quasi ovunque finito.

Proposizione 1.4 *Per g ed f come sopra si ha $g * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|g * f\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p$.*

Dim. La dimostrazione di questo risultato è relativamente semplice quando $p = 1$ o, per $p > 1$, quando si conosce già la misurabilità della funzione $g * f$. Purtroppo non vi sono argomenti “elementari” in grado di dimostrare la misurabilità di tali funzioni. La dimostrazione che proponiamo di seguito è più complessa di quella che solitamente è riportata nei testi ma ha il pregio di non dare per scontato la misurabilità di $g * f$.

Step 1. Fissiamo due rappresentativi g, f delle rispettive classi di equivalenza in $L^1\mathbb{R}^n$ ed $L^p(\mathbb{R}^n)$. Decomponiamo g e f nelle loro parti positive e negative: g^\pm e f^\pm . Siano s_g, s_f in $\{+, -\}$ ed osserviamo che per ciascuna delle quattro possibili scelte di s_g, s_f il segno di $g^{s_g}(\mathbf{x} - \mathbf{y})f^{s_f}(\mathbf{y})$ è ben definito, nel senso che tali funzioni o sono sempre ≥ 0 o sempre ≤ 0 .

Step 2 Dalla misurabilità di g come mappa da $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ segue la misurabilità di $g^{s_g}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ come mappa da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Queste segue facilmente una volta che si sia dimostrato che se \mathcal{M} è misurabile in \mathbb{R}^n , allora $D_{\mathcal{M}} := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n: \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{M}\}$ è misurabile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Per fare ciò procediamo nel modo seguente. Sia $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definita da $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{y})$. La mappa ϕ è lineare ed invertibile, con $\phi^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y})$. In particolare ϕ è un diffeomorfismo e $D_{\mathcal{M}} = \phi^{-1}(\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n)$. Il teorema di Fubini garantisce la misurabilità in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ di $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$, quindi anche quella di $D_{\mathcal{M}}$ è dimostrata.

Step 3. Dunque ciascuna delle funzioni $g^{s_g}(\mathbf{x} - \mathbf{y})f^{s_f}(\mathbf{y})$ è misurabile come mappa $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ed ha segno definito. Dal teorema di Tonelli segue la misurabilità delle funzioni

$$(g^{s_g} * f^{s_f})(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} g^{s_g}(\mathbf{x} - \mathbf{y})f^{s_f}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Si osservi che per affermare questo fatto si fa appello al teorema di Tonelli (quindi si usa la definitezza del segno dell'integranda) e non al teorema di Fubini (visto che non è noto se l'integranda sia o meno integrabile).

Step 4. Dimostriamo ora che le funzioni $g^{s_g} * f^{s_f}$ sono in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Infatti, se $\|g^{s_g}\|_1 = 0$ allora g^{s_g} è q.o. nulla e la tesi è evidentemente vera. Supponiamo

+

+

$\|g^{sg}\|_1 \neq 0$ e sia allora \tilde{g}^{sg} la funzione $g^{sg}/\|g^{sg}\|_1$. Dunque $\tilde{g}^{sg} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\|\tilde{g}^{sg}\|_1 = 1$. Si ha allora che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(\tilde{g}^{sg} * f^{sf})(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}^{sg}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f^{sf}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|^p d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}^{sg}(\mathbf{y}) f^{sf}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Usando la convessità (vd. Lemma 1.3) si ha

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}^{sg}(\mathbf{y})| |f^{sf}(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x}$$

e usando Tonelli per giustificare lo scambio nell'ordine di integrazione si ha

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}^{sg}(\mathbf{y})| |f^{sf}(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}^{sg}(\mathbf{y})| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f^{sf}(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}^{sg}(\mathbf{y})| \|f^{sf}\|_p^p d\mathbf{y} = \|\tilde{g}^{sg}\|_1 \cdot \|f^{sf}\|_p^p < +\infty. \end{aligned}$$

La tesi è dunque dimostrata per $\tilde{g}^{sg} * f^{sf}$ e moltiplicando per $\|g^{sg}\|_1^p$ si ha la tesi per $g^{sg} * f^{sf}$.

Step 5. L'appartenenza di ciascuna $g^{sg} * f^{sf}$ a $L^p(\mathbb{R}^n)$ garantisce la finitezza quasi ovunque di ciascuna di esse. La funzione

$$(g * f)(\mathbf{x}) = (g^+ * f^+)(\mathbf{x}) - (g^+ * f^-)(\mathbf{x}) - (g^- * f^+)(\mathbf{x}) + (g^- * f^-)(\mathbf{x})$$

è dunque anch'essa ben definita quasi ovunque e risulta misurabile, in quanto somma di funzioni misurabili.

Step 6. Ora che la misurabilità di $g * f$ è stata provata possiamo finalmente terminare la dimostrazione. Se $\|g\|_1 = 0$ allora g è q.o. nulla ed è evidentemente vero che $\|g * f\|_p \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|_p$, visto che sia $g * f$ ed g sono q.o. nulli. Supponiamo $\|g\|_1 \neq 0$ e sia allora \tilde{g} la funzione $g/\|g\|_1$. Dunque $\tilde{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\|\tilde{g}\|_1 = 1$. Si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\tilde{g} * f)(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|^p d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right|^p d\mathbf{x}.$$

Usando la convessità si ha

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(\mathbf{y})| |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x}$$

+

+

e poi Tonelli si ha

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(\mathbf{y})| |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(\mathbf{y})| \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}(\mathbf{y})| \|f\|_p^p d\mathbf{y} = \|\tilde{g}\|_1 \|f\|_p^p = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

La tesi è dunque dimostrata per $\tilde{g} * f$. La tesi per $g * f$ segue immediatamente moltiplicando per $\|g\|_1^p$. ■

Oss. 1.2 La proposizione precedente mostra che la convoluzione di due funzioni di $L^1(\mathbb{R}^n)$ è ben definita in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Di conseguenza possiamo pensare alla convoluzione come ad una operazione tra funzioni di $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si dimostra facilmente che $f * g = g * f$ e che $(g * f) * h = g * (f * h)$, ovvero che tale operazione è commutativa ed associativa. Rispetto a tale operazione lo spazio $L^1(\mathbb{R}^n)$ acquista la struttura di algebra commutativa. Essa è però priva di elemento neutro, ovvero non esiste una funzione $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_0 * g = g$ per ogni $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Per dimostrare ciò si può osservare che la trasformata di Fourier $\hat{\cdot}: f \rightarrow \hat{f}$ con $\hat{f}(\mathbf{y}) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(\mathbf{x}, \mathbf{y})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, che risulta ben definita su $L^1(\mathbb{R}^n)$, rispetta l'operazione di convoluzione poiché $\widehat{(f * g)} = \hat{f} \cdot \hat{g}$. Se f_0 esistesse questa avrebbe come trasformata una funzione \hat{f}_0 per la quale si dovrebbe avere $\hat{f}_0 \hat{g} = \hat{g}$ per ogni $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Poiché per ogni rettangolo Q esiste una funzione di $L^1(\mathbb{R}^n)$ la cui trasformata di Fourier è non nulla in Q , si ha che \hat{f}_0 deve essere costante ed uguale ad 1. Ciò è però impossibile, visto che il teorema di Riemann sulla trasformata di Fourier delle funzioni di $L^1(\mathbb{R}^n)$ dimostra che esse vanno necessariamente a zero all'infinito. □

Proposizione 1.5 Se $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \in [1, +\infty)$, allora $g * f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

Dim. Anzitutto dimostriamo che la funzione $g * f$ risulta ben definita puntualmente. Vista la definizione di convoluzione, ciò equivale ad affermare che $g(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})$ (vista come funzione di \mathbf{y} , ad \mathbf{x} fissato) appartiene ad $L^1(\mathbb{R}^n)$ qualunque sia il valore di \mathbf{x} . Osserviamo che il prodotto $g(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})$ può essere scritto come $(\tau_{\mathbf{x}}\bar{g})(\mathbf{y})f(\mathbf{y})$ dove si è introdotta la funzione \bar{g} definita da $\bar{g}(\mathbf{y}) := g(-\mathbf{y})$. La compattezza del supporto di g garantisce la sua appartenenza ad $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$, e così

- se $p = 1$ usiamo la limitatezza di g e l'appartenenza di f ad $L^1(\mathbb{R}^n)$ per concludere che

$$\|\tau_{\mathbf{x}}\bar{g}f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq \|\tau_{\mathbf{x}}\bar{g}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = \|\tau_{\mathbf{x}}\bar{g}\|_\infty \|f\|_1 < +\infty;$$

- se $p \in (1, +\infty)$ la tesi segue da Hölder, visto che essa garantisce che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_{\mathbf{x}}\bar{g}(\mathbf{y})f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \leq \|\tau_{\mathbf{x}}\bar{g}\|_q \|f\|_p = \|g\|_q \|f\|_p < \infty$$

dove q è quel reale tale che $1/p + 1/q = 1$.

Sia ora \mathbf{x}_0 fissato, dimostriamo che $g * f$ è continua in \mathbf{x}_0 . Infatti, si ha

$$\begin{aligned} |g * f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - g * f(\mathbf{x}_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})]f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Per comodità poniamo $\check{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})$. Si ha allora

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |(\tau_{\mathbf{h}}\check{g})(\mathbf{y}) - \check{g}(\mathbf{y})| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

Se $p = 1$ allora dalla relazione precedente otteniamo che

$$|g * f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - g * f(\mathbf{x}_0)| \leq \|\tau_{\mathbf{h}}\check{g} - \check{g}\|_{\infty} \cdot \|f\|_1$$

e la tesi segue allora dalla Prop. 1.3 per la compattezza del supporto di g che implica la compattezza del supporto di \check{g} .

Se $p > 1$ invece osserviamo che la compattezza del supporto di \check{g} implica l'esistenza di un compatto K che contiene sia il supporto di \check{g} sia quello di $\tau_{\mathbf{h}}\check{g}$ per ogni valore di \mathbf{h} con $|\mathbf{h}| < 1$. Per tali valori di \mathbf{h} la funzione $\tau_{\mathbf{h}}\check{g} - \check{g}$ sta quindi in $L^q(\mathbb{R}^n)$ (dove q è l'esponente coniugato a p) e quindi dalla disuguaglianza di Hölder si ha

$$|g * f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - g * f(\mathbf{x}_0)| \leq \|\tau_{\mathbf{h}}\check{g} - \check{g}\|_q \cdot \|f\|_p$$

così che la tesi segue ora dalla Prop. 1.2. ■

Se la funzione g è più che continua, di classe \mathcal{C}^m ad esempio, l'argomento che ha consentito la dimostrazione della proposizione precedente può essere esteso a dimostrare che anche la convoluzione $g * f$ ha la medesima regolarità.

Proposizione 1.6 *Se $g \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^n)$ e $f \in L^p$ con $p \in [1, +\infty)$, allora $g * f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$, con $\partial^{\alpha}(g * f) = \partial^{\alpha}g * f$ per ogni $|\alpha| \leq m$. In particolare, se $g \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ allora $g * f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Dim. Sappiamo già che la convoluzione con una g continua produce una funzione continua. La tesi per ogni ordine di regolarità m seguirà perciò per induzione su m una volta che avremo dimostrato che se g è \mathcal{C}^1 allora anche $g * f$ è \mathcal{C}^1 , e che $\partial_j(g * f) = \partial_j g * f$ per ogni j . D'altra parte, la dimostrazione di tale relazione per $j = 1, \dots, n$ sono identiche al caso $j = 1$. Possiamo perciò limitarci alla

dimostrazione del seguente fatto: se g ammette derivata parziale $\partial_1 g$ continua, allora anche $g * f$ ha derivata parziale ∂_1 continua, con $\partial_1(g * f) = \partial_1 g * f$. Sia dunque \mathbf{x}_0 fissato ed $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Ripetendo i soliti passaggi standard si ha

$$\begin{aligned} & \left| \frac{g * f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_1) - g * f(\mathbf{x}_0)}{h} - (\partial_1 g * f)(\mathbf{x}_0) \right| \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{g(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})}{h} - \partial_1 g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) \right| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Poniamo

$$G(h, \mathbf{y}) := \begin{cases} \frac{1}{h}(g(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_1 - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})) - \partial_1 g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) & \text{se } h \neq 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

così che la disuguaglianza precedente viene scritta come

$$\left| \frac{g * f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_1) - g * f(\mathbf{x}_0)}{h} - (\partial_1 g * f)(\mathbf{x}_0) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |G(h, \mathbf{y})| |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}.$$

Si osservi che $G(h, \mathbf{y})$ è una funzione continua nella sua dipendenza congiunta da h ed \mathbf{y} , non solo nelle due variabili separatamente prese. La funzione inoltre è a supporto compatto nella variabile \mathbf{y} , per ogni valore di h fissato. Se poi limitiamo h a variare in un compatto, ad esempio se supponiamo $h \in [-1, 1]$, allora il supporto di G (nella sua dipendenza congiunta da h ed \mathbf{y}) risulta compatto e contenuto in $[-1, 1] \times K$, dove K è un compatto. Ovviamente non abbiamo nessuna perdita di generalità nel supporre $h \in [-1, 1]$; possiamo quindi proseguire sotto l'ipotesi che G sia a supporto compatto.

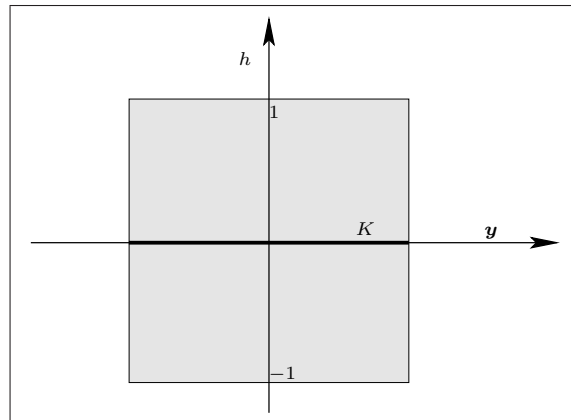


FIGURA 1.1.

Se $p = 1$ usiamo la compattezza del supporto di G per dedurre dalla relazione precedente che

$$\left| \frac{g * f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_1) - g * f(\mathbf{x}_0)}{h} - (\partial_1 g * f)(\mathbf{x}_0) \right| \leq \|G(h, \cdot)\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

e la tesi segue allora dalla uniforme continuità di G che implica che $\|G(h, \cdot)\|_\infty$ tende a $\|G(0, \cdot)\|_\infty = 0$ per $h \rightarrow 0$.

Se invece $p > 1$ osserviamo che la compattezza del supporto di G garantisce l'appartenenza di $G(h, \cdot)$ a $L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni h e dove q è l'esponente coniugato a p . Da Hölder segue allora che

$$\left| \frac{g * f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_1) - g * f(\mathbf{x}_0)}{h} - (\partial_1 g * f)(\mathbf{x}_0) \right| \leq \|G(h, \cdot)\|_q \|f\|_p.$$

La compattezza del supporto di G garantisce l'esistenza di una maggiorante di $G(h, \cdot)$ integrabile e indipendente da h (basta prendere la costante $\|G\|_{\infty, [-1, 1] \times K}$ moltiplicata la funzione caratteristica di K). Dal teorema di convergenza dominata segue così che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|G(h, \cdot)\|_q = \|G(0, \cdot)\|_q = 0$$

completando quindi la dimostrazione della tesi. ■

1.5. Mollificatori

Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione con le seguenti proprietà:

- ha supporto in $[-1, 1]$ ed è di classe \mathcal{C}^∞ ,
- è a valori non negativi, con $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$.

Un esempio di funzione con queste caratteristiche è la funzione

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{c} e^{1/(x^2-1)} & \text{in } (-1, 1) \\ 0 & \text{in } (-1, 1)^c \end{cases} \quad \text{con } c := \int_{-1}^1 e^{1/(x^2-1)} dx.$$

L'esatta espressione di g non avrà però alcuna importanza e tutte le considerazioni seguenti deriveranno interamente dalle proprietà qui sopra evidenziate.

Sia poi $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $G(x_1, \dots, x_n) := g(x_1) \cdots g(x_n)$.

Si osservi che

- G è di classe \mathcal{C}^∞ ed ha supporto in $[-1, 1]^n$,
- G è a valori non negativi, con $\int_{\mathbb{R}^n} G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$.

Infine, per ogni intero $k \geq 1$ sia $G_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $G_k(\mathbf{x}) := k^n G(k\mathbf{x})$. Si osservi che

- 1) G_k è di classe \mathcal{C}^∞ ed ha supporto in $[-1/k, 1/k]^n$,
- 2) G_k è a valori non negativi, con $\int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ per ogni k ,
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} G_k(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, uniformemente in domini B_η^c per ogni $\eta > 0$, ovvero uniformemente per le \mathbf{x} con $|\mathbf{x}| \geq \eta$.

Le funzioni che hanno le proprietà evidenziate per le G_k precedenti sono dette *mollificatori* (per la precisione *mollificatori a supporto compatto*). Tali funzioni si chiamano in tal modo perché convolvendo con esse una f fissata si ottiene una successione di funzioni regolari che convergono, nella norma opportuna, ad f stessa. Esse possono essere quindi pensate come a versioni “regolarizzate” di f . Ecco l’affermazione corretta.

Proposizione 1.7 *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e sia G_k una successione di mollificatori. Allora, per ogni $p \in [1, +\infty)$ si ha*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|G_k * f - f\|_p = 0.$$

Dim. Dalle Prop. 1.4-1.5 segue che ciascuna $G_k * f$ è continua (in particolare è ben definita puntualmente) ed è in L^p . D’altra parte, si ha

$$\begin{aligned} \|G_k * f - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |G_k * f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - f(\mathbf{x}) \right|^p d\mathbf{x} \end{aligned}$$

usando la proprietà 2) delle G_k , si ha

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})] d\mathbf{y} \right|^p d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{w}) [f(\mathbf{x} - \mathbf{w}) - f(\mathbf{x})] d\mathbf{w} \right|^p d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{w}) [(\tau_{\mathbf{w}} f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] d\mathbf{w} \right|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Usando di nuovo la proprietà 2) delle G_k e la convessità della mappa $x \rightarrow x^p$ (vd. Lemma 1.3 ed il successivo esempio 1.1) si ha

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{w}) |(\tau_{\mathbf{w}} f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{w} \right] d\mathbf{x}.$$

Il teorema di Tonelli consente di scambiare l’ordine di integrazione, ottenendo

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{w}) |(\tau_{\mathbf{w}} f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right] d\mathbf{w} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{w}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} |(\tau_{\mathbf{w}} f)(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right] d\mathbf{w} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{w}) \|\tau_{\mathbf{w}} f - f\|_p^p d\mathbf{w} \end{aligned}$$

Spezziamo l'integrale nel modo seguente

$$= \int_{|\mathbf{w}| < \eta} G_k(\mathbf{w}) \|\tau_{\mathbf{w}} f - f\|_p^p d\mathbf{w} + \int_{|\mathbf{w}| > \eta} G_k(\mathbf{w}) \|\tau_{\mathbf{w}} f - f\|_p^p d\mathbf{w}$$

in cui è stato introdotto un parametro $\eta > 0$. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$. In base alla Prop. 1.2 possiamo trovare η in modo che $\|\tau_{\mathbf{w}} f - f\|_p^p \leq \varepsilon$ per ogni \mathbf{w} con $|\mathbf{w}| < \eta$. Il primo integrale quindi può essere stimato da $\varepsilon \int_{|\mathbf{w}| < \eta} G_k(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \leq \varepsilon$, e ciò indipendentemente dal parametro k . D'altra parte il secondo integrale può essere stimato da $2\|f\|_p^p \int_{|\mathbf{w}| > \eta} G_k(\mathbf{w}) d\mathbf{w}$, quindi abbiamo

$$\leq \varepsilon + 2\|f\|_p^p \int_{|\mathbf{w}| > \eta} G_k(\mathbf{w}) d\mathbf{w}.$$

La tesi segue allora osservando che in base alla proprietà 3) l'integrale di G_k in $|\mathbf{w}| > \eta$ può essere reso arbitrariamente piccolo pur di prendere k sufficientemente grande. ■

Possiamo finalmente dimostrare il seguente importante risultato.

Teorema 1.1 *Le funzioni $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sono dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.*

Dim. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Per il Lemma 1.4 possiamo supporre che f sia limitata ed a supporto limitato. Sia poi G_k una successione di mollificatori in \mathcal{C}_c^∞ . Per la Prop. 1.6 le funzioni $G_k * f$ sono tutte di classe \mathcal{C}^∞ . La compattezza del supporto di G_k e la limitatezza del supporto di f garantisce la compattezza del supporto di $G_k * f$. Infine, per la Prop. 1.7 tale successione tende ad f in $L^p(\mathbb{R}^n)$. ■

Si osservi che la tesi precedente non è estendibile al caso $p = \infty$, ovvero che le funzioni di $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ non sono dense in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Infatti la funzione costante $f(\mathbf{x}) = 1$ appartiene a tale spazio ma non può essere approssimata in norma $\|\cdot\|_\infty$ da funzioni continue g a supporto compatto, visto che per esse si ha $|g(\mathbf{x}) - 1| = 1$ pur di prendere \mathbf{x} sufficientemente grande, così che $\|g - 1\|_\infty \geq 1$.

A costo di alcune complicazioni la costruzione precedente può essere estesa agli aperti di \mathbb{R}^n , così da dimostrare che lo spazio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$ e per ogni aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (vd. Brezis², Cor. IV.23.).

1.6. Separazione delle variabili: presupposti teorici

Siano $A \in \mathbb{R}^n$ e $B \in \mathbb{R}^m$ misurabili. Prese due funzioni $g_a \in L^p(A)$, $g_b \in L^p(B)$ con $p \in [1, +\infty)$, consideriamo la funzione $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := g_a(\mathbf{x})g_b(\mathbf{y})$. La non univoca definizione dei valori di g_a e di g_b fa sì che anche f non sia ben definita puntualmente. Il teorema di Fubini garantisce però che se $\tilde{A} \subset A$ ha misura nulla in \mathbb{R}^n allora l'insieme $\tilde{A} \times B$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ed ovviamente lo stesso vale per B ; ciò dimostra che f è ben definita come classe di

²H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

equivalenza di funzioni quasi ovunque uguali. Il teorema di Fubini mostra poi che $f \in L^p(A \times B)$. Chiamiamo $L^p(A) \otimes L^p(B)$ il sottospazio vettoriale di $L^p(A \times B)$ generato dalle funzioni costruite secondo il processo precedente; esso è detto *spazio prodotto tensore*. Il risultato seguente è essenziale per le nostre indagini successive.

Teorema 1.2 *Lo spazio $L^p(A) \otimes L^p(B)$ è denso in $L^p(A \times B)$.*

Dim. La dimostrazione si basa sulla seguente osservazione. Il Lemma 1.6 dimostra che le funzioni passo sono dense in $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ ma una semplice estensione dell'argomento che ha portato a quella affermazione dimostra che le funzioni passo sono dense anche nello spazio $L^p(A \times B)$. Tali funzioni sono però gli elementi dello spazio vettoriale generato dalle funzioni caratteristiche dei rettangoli. Per completare la dimostrazione della tesi basta perciò osservare che ogni rettangolo $Q \subseteq A \times B$ di $A \times B$ è prodotto cartesiano di un rettangolo Q_a contenuto in A ed uno Q_b contenuto in B . Scrivendo $Q = Q_a \times Q_b$ si ha $\chi_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_{Q_a}(\mathbf{x})\chi_{Q_b}(\mathbf{y})$ e questo dimostra la tesi, visto che $\chi_{Q_a} \in L^p(A)$ e $\chi_{Q_b} \in L^p(B)$. ■

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile; la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} fa sì che lo spazio vettoriale generato dalle funzioni caratteristiche dei rettangoli a *coordinate razionali* sia denso nello spazio vettoriale generato dalle funzioni caratteristiche dei rettangoli. Quest'ultimo è a sua volta denso in $L^p(A)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$ (vd. Lemma 1.6). Ciò dimostra che gli spazi $L^p(A)$ sono tutti *separabili* (ovvero, ammettono un sottoinsieme numerabile e denso). In particolare risultano separabili gli spazi di Hilbert $L^2(A)$. Come è noto, questo equivale all'esistenza di un sistema ortonormale completo in tali spazi. Unita al teorema precedente questa affermazione consente di dimostrare un importante risultato sugli spazi $L^2(A \times B)$.

Corollario 1.1 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^m$ misurabili. Sia $\{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ un s.o.n.c. di $L^2(A)$ e $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un s.o.n.c. di $L^2(B)$, allora la famiglia di funzioni $\{\Theta_{h,k}\}_{h,k \in \mathbb{N}}$ con $\Theta_{h,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \phi_h(\mathbf{x})\psi_k(\mathbf{y})$ è un s.o.n.c. di $L^2(A \times B)$.*

Dim. Che le $\Theta_{h,k}$ siano un sistema ortonormale è di verifica immediata a partire dalla definizione (ed usando Fubini); la sua completezza segue dalla completezza dei singoli sistemi $\{\phi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$, $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ nei rispettivi spazi, e dal teorema precedente. ■

Il metodo di *soluzione per separazione delle variabili* di certe equazioni alle derivate parziali lineari consiste nel determinare anzitutto le soluzioni $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ che si fattorizzano nel prodotto $g(\mathbf{x})h(\mathbf{y})$ di funzioni dipendenti da insiemi disgiunti di variabili, e nell'osservare che anche se in questo modo non si determinano tutte le soluzioni dell'equazione, ogni soluzione è tuttavia descrivibile come limite di somme di soluzioni di tale forma in virtù del corollario precedente, almeno quando essa è interpretata come elemento di $L^2(A \times B)$ ed il limite è preso in tale spazio.

1.7. Relazioni integrali

Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n il cui bordo $\partial\Omega$ sia unione finita di superfici regolari ed orientabili. Sia f una funzione di classe \mathcal{C}^1 in Ω . Sotto queste ipotesi vale il seguente risultato:

$$\text{(TEOREMA DI GREEN)} \quad \int_{\Omega} \partial_j f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) \nu_j \, d\sigma \quad \forall j,$$

dove ν_j è la componente j del vettore normale $\boldsymbol{\nu}$ orientato in modo uscente da Ω .

Se \mathbf{F} è un campo vettoriale in Ω di classe \mathcal{C}^1 , sommando al variare di j la relazione precedente applicata alle funzioni F_j componenti di \mathbf{F} si ottiene:

$$\text{(TEOREMA DI GAUSS)} \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\sigma.$$

Se poi f è di classe \mathcal{C}^2 , applicando la relazione integrale precedente al campo vettoriale associato ad ∇f si ottiene:

$$\text{(TEOREMA DEL LAPLACIANO)} \quad \int_{\Omega} \Delta f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, d\sigma,$$

dove a destra compare la derivata normale esterna di f .

Siano ora f, g entrambe di classe \mathcal{C}^2 in $\bar{\Omega}$. Applicando il Teorema di Green alla funzione $f\partial_j g$ si ottiene:

$$\int_{\Omega} \partial_j (f\partial_j g)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f(\partial_j g) \nu_j \, d\sigma \quad \forall j,$$

da cui, sommando su j , segue

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f \Delta g \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, d\sigma.$$

Sottraendo la relazione precedente e la analoga ottenuta scambiando il ruolo di f e g si ottiene infine

$$\text{(RELAZIONE DI GREEN)} \quad \int_{\Omega} [f \Delta g - g \Delta f] \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left[f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\nu}} - g \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right] \, d\sigma.$$

+

+

CAPITOLO 2

Funzioni armoniche in \mathbb{R}^2

Sia $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe \mathcal{C}^2 soddisfacente l'equazione $\frac{d^2}{dx^2}u = 0$. L'equazione può essere evidentemente risolta esplicitamente e la generica soluzione è necessariamente della forma

$$u = \alpha + \beta x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

A partire da questa espressione le seguenti proprietà di u sono facilmente provate:

- 1) (**Regolarità**) u nasce come funzione di classe \mathcal{C}^2 ma in realtà risulta essere di classe \mathcal{C}^∞ .
- 2) (**Proprietà della media**) per ogni $x \in (a, b)$ e per ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo si ha

$$u(x) = \frac{u(x+r) + u(x-r)}{2}, \quad \text{e} \quad u(x) = \frac{1}{2r} \int_{[x-r, x+r]} u(y) dy.$$

Queste identità mostrano come u sia in ogni punto la media dei valori che essa assume sul bordo del segmento $[x-r, x+r]$ (prima formula), nonché la media integrale dei valori che essa assume nel segmento $[x-r, x+r]$ (seconda formula).

- 3) (**Principio del max.**) u ha estremi in (a, b) se e solo se è costante, e $\|u\|_{\infty, [a, b]} = \max\{|u(a)|, |u(b)|\}$, ovvero il massimo assunto da u sul compatto $[a, b]$ è assunto sul bordo di tale insieme.

Tutte le proprietà qui sopra elencate possono essere facilmente formulate per funzioni definite su aperti di \mathbb{R}^n . Anche l'equazione differenziale che abbiamo considerato ammette una naturale estensione al caso di funzioni definite su tali aperti, divenendo

$$\Delta u := \partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \cdots + \partial_{x_n}^2 u = 0.$$

Tali funzioni sono dette armoniche e nei capitoli che seguono mostreremo che tutte manifestano quelle proprietà. Esso non sono quindi specifiche della situazione mono-dimensionale ma anzi sono la manifestazione di un fenomeno generale. Per maggiore chiarezza, anche se a costo di una certa ripetizione, riteniamo sia utile iniziare lo studio di tali funzioni a partire del primo caso non elementare ovvero in \mathbb{R}^2 . Ciò perché l'esistenza in \mathbb{R}^2 di una struttura complessa conferisce alle

+

+

funzioni armoniche di \mathbb{R}^2 notevoli proprietà aggiuntive tramite le quali la dimostrazione della validità delle proprietà qui sopra menzionate risulta notevolmente semplificata. In seguito estenderemo tali risultati agli spazi di dimensione superiore.

Ricordiamo quindi la definizione seguente.

Def. 2.1 (f. armonica) Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^2 . Una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ a valori in \mathbb{R} che soddisfa l'equazione

$$\Delta u := \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$$

è detta *armonica* in Ω .

2.1. Armonica coniugata

Sia Ω un aperto connesso di \mathbb{R}^2 e sia u armonica in Ω . La forma differenziale

$$\omega := -\partial_y u dx + \partial_x u dy$$

è chiusa, visto che $\partial_y(-\partial_y u) = \partial_x(\partial_x u)$. Supponiamo che Ω sia anche semplicemente connesso, allora ω risulta esatta in Ω e quindi ammette un potenziale. Esiste quindi $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe \mathcal{C}^2 tale che $\omega = dv$. La funzione v è unicamente determinata a meno di una costante arbitraria ed è detta *armonica coniugata* di u . Che effettivamente v sia armonica può essere verificato direttamente, poiché

$$\Delta v = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = \partial_x(-\partial_y u) + \partial_y(\partial_x u) = 0.$$

Esempio 2.1 Consideriamo $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. In \mathbb{R}^2 si ha $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 6x - 6x = 0$ e quindi tale polinomio è armonico in \mathbb{R}^2 . La funzione armonica coniugata è il potenziale di

$$\omega = -\partial_y u dx + \partial_x u dy = 6xy dx + (3x^2 - 3y^2) dy.$$

Tale potenziale può essere determinato facilmente, ottenendo $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + c$ dove c è una arbitraria costante reale. \square

Esempio 2.2 Consideriamo $u(x, y) = e^{-y} \cos x$. In \mathbb{R}^2 si ha $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = e^{-y}(-\cos x) + e^{-y} \cos x = 0$ e quindi tale funzione è armonica in \mathbb{R}^2 . La funzione armonica coniugata è il potenziale di

$$\omega = -\partial_y u dx + \partial_x u dy = e^{-y} \cos x dx - e^{-y} \sin x dy.$$

Tale potenziale può essere determinato facilmente, ottenendo $v(x, y) = e^{-y} \sin x + c$ dove c è una arbitraria costante reale. \square

2.2. Olomorfa associata

Sia Ω un aperto connesso e semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 . Sia u una funzione armonica in Ω e sia v una delle armoniche coniugate ad u . La funzione $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$ è di classe \mathcal{C}^2 e soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann. Infatti dalla definizione di armonica coniugata segue appunto che

$$\partial_x u = \partial_y v \quad , \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Tale funzione può essere quindi interpretata come funzione *olomorfa* da $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Abbiamo quindi dimostrato che ogni funzione armonica u (su un aperto connesso e semplicemente connesso) può essere interpretata come parte reale di una funzione olomorfa che risulta univocamente determinata da u a meno di una costante additiva complessa immaginaria pura.

Esempio 2.3 Abbiamo visto che $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ è armonica in \mathbb{R}^2 con coniugata $v(x, y) = 3x^2y - y^3$. La funzione olomorfa F associata è quindi $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = (x + iy)^3$ ovvero $F(z) = z^3$. \square

Esempio 2.4 Abbiamo visto che $u(x, y) = e^{-y} \cos x$ è armonica in \mathbb{R}^2 con coniugata $v(x, y) = e^{-y} \sin x$. La funzione olomorfa F associata è quindi $F(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = e^{-y} \cos x + i(e^{-y} \sin x) = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$ ovvero $F(z) = e^{iz}$. \square

2.3. Conseguenze

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso e semplicemente connesso e sia u una funzione armonica in Ω . Abbiamo visto che esiste una funzione olomorfa $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con $u = \operatorname{Re} F$. La teoria delle funzioni olomorfe mostra che esse ammettono derivate di ogni ordine. Ne segue che:

Teorema 2.1 (regolarità) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Se $\Delta u = 0$ in Ω allora $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Dim. La regolarità \mathcal{C}^∞ è una nozione locale e una volta fissato un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ è sempre possibile individuare un aperto connesso e semplicemente connesso Ω' con $\{\mathbf{x}\} \subset \Omega' \subseteq \Omega$ al quale applicare le osservazioni contenute nelle sezioni precedenti. \blacksquare

La formula integrale di Cauchy mostra poi che

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(w)}{w - z} dw$$

dove γ è una qualsiasi curva contenuta in Ω e che sia regolare, chiusa, orientata in senso antiorario. Scegliamo quale γ una circonferenza centrata in z e di raggio r sufficientemente piccolo così che γ sia in Ω . Si ha allora

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(z + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z + re^{i\theta}) d\theta$$

da cui, prendendo la parte reale, segue che

$$(2.1) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta \quad \forall r \in (0, \varepsilon).$$

Tale formula esprime quella che viene chiamata *proprietà del valor medio* per le funzioni armoniche, ovvero: il valore che u assume al centro di una circonferenza (di raggio sufficientemente piccolo) è pari al valore medio dei valori che u assume sul bordo di tale circonferenza.

Moltiplichiamo la relazione precedente per R ed integriamo in R per $R \in (0, r)$. Si ha allora

$$\int_{(0,r)} u(x, y) R dR = \frac{1}{2\pi} \int_{(0,r)} \left[\int_0^{2\pi} u(x + R \cos \theta, y + R \sin \theta) d\theta \right] R dR$$

da cui

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{(0,r)} \left[\int_0^{2\pi} u(x + R \cos \theta, y + R \sin \theta) d\theta \right] R dR$$

ed una applicazione del teorema di Fubini mostra che l'integrale a destra altri non è che l'integrale di u sul disco con centro in \mathbf{x} e raggio r . Abbiamo così dedotto che

$$(2.2) \quad u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(\mathbf{x})} u(x', y') dx' dy' \quad \forall r \in (0, \varepsilon)$$

che mostra che il valore che u assume al centro di un disco (di raggio sufficientemente piccolo) è pari al valore medio dei valori che u assume in tale disco.

Oss. 2.1 Abbiamo appena dimostrato che (2.1) implica (2.2). Si può dimostrare facilmente che vale il viceversa, ovvero che (2.2) implica (2.1). Infatti, supponiamo (2.2) vera per un fissato \mathbf{x} e per $r \in (0, \varepsilon)$. La (2.2) può essere scritta nella forma

$$\pi u(\mathbf{x}) r^2 = \int_{B_r(\mathbf{x})} u(x', y') dx' dy' = \int_{(0,r)} R \left[\int_0^{2\pi} u(x + R \cos \theta, y + R \sin \theta) d\theta \right] dR$$

(qui si sono introdotte le coordinate polari e si è usato Fubini) e derivando rispetto ad r si ha

$$2\pi u(\mathbf{x}) r = r \int_0^{2\pi} u(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) d\theta$$

che è appunto la (2.1). □

Una notevole conseguenza di tale formula è il seguente risultato.

Teorema 2.2 *Sia u armonica in Ω , aperto connesso di \mathbb{R}^2 . Se u ha estremanti relativi in Ω allora è costante.*

Dim. Supponiamo che esista $\mathbf{p} \in \Omega$ in cui u ha un estremante relativo. Cambiando u con $-u$, se necessario, possiamo supporre che l'estremante sia un massimo locale. Allora esiste r positivo e sufficientemente piccolo perché si abbia $B_r(\mathbf{p}) \subseteq \Omega$ e $u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{p})$ per $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{p})$. Di conseguenza in $B_r(\mathbf{p})$ si ha che $u(\mathbf{p}) - u(\mathbf{x}) \geq 0$ mentre dalla proprietà del valor medio nella forma (2.2) segue

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(\mathbf{p})} (u(\mathbf{p}) - u(x', y')) \, dx' \, dy' = 0.$$

Ciò dimostra che $u(\mathbf{p}) - u(\mathbf{x})$ è quasi ovunque nulla in $B_r(\mathbf{p})$, ovvero che $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{p})$. D'altra parte u è continua, quindi in realtà $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})$ per ogni \mathbf{x} in $B_r(\mathbf{p})$. Ciò dimostra che u è costante in $B_r(\mathbf{p})$. Sia Ω' un qualsiasi aperto di Ω che sia anche connesso e semplicemente connesso e che contenga \mathbf{p} . In Ω' risulta ben definita (a meno di costanti) la funzione olomorfa F associata ad u . Visto che u è costante in un disco contenente \mathbf{p} , anche F risulta costante in tale disco (basta pensare alle equazioni di Cauchy-Riemann) e quindi, per l'unicità del prolungamento, essa è costante in tutto Ω' . In Ω' è quindi costante anche u , visto che u è la parte reale di F . Sia allora \mathbf{q} un qualsiasi punto di Ω distinto da \mathbf{p} . Per la connessione di Ω esiste una curva γ regolare in Ω che connette \mathbf{p} a \mathbf{q} (vd. Fig. 2.1).

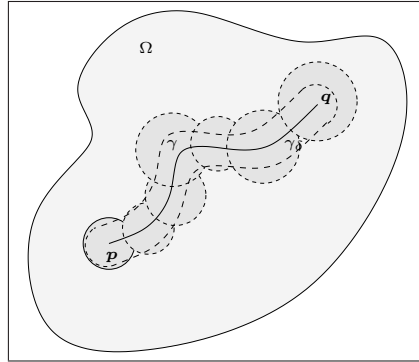


FIGURA 2.1.

A ciascun punto \mathbf{w} di γ associamo un disco aperto di centro \mathbf{w} e raggio sufficientemente piccolo perché tale disco sia interamente contenuto in Ω . Per la compattezza di γ un numero finito di tali dischi basta a coprire interamente γ e ciò mostra che esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma_\delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\mathbf{x}, \gamma) < \delta\}$ sia interamente contenuto in Ω . Osserviamo che γ_δ è un aperto, connesso e semplicemente connesso contenente \mathbf{p} e \mathbf{q} ; possiamo quindi applicare a questo aperto quanto prima illustrato per Ω' deducendone che u è costante in γ_δ . In particolare $u(\mathbf{q}) = u(\mathbf{p})$. Visto che \mathbf{q} è arbitrario possiamo concludere che u è costante in Ω . ■

Una importante variante del teorema precedente.

Teorema 2.3 (Principio del max.) *Sia u continua in $\bar{\Omega}$ e armonica in Ω , con Ω aperto di \mathbb{R}^2 e limitato. Allora*

$$\|u\|_{\infty, \bar{\Omega}} = \|u\|_{\infty, \partial\Omega}.$$

Dim. L'esistenza del massimo è garantita da Weierstrass, visto che $\bar{\Omega}$ è compatto. Se u è costante la tesi è ovvia, se invece non è costante allora tale valore non può essere assunto in Ω per il teorema precedente. ■

Corollario 2.1 *Sia u continua in $\bar{\Omega}$ e armonica in Ω , con Ω aperto di \mathbb{R}^2 e limitato. Se u è nulla sul bordo di Ω allora u è identicamente nulla in Ω .*

La linearità dell'operatore di Laplace ed il corollario precedente consentono di provare il seguente risultato.

Corollario 2.2 *Esiste al più una funzione u continua in $\bar{\Omega}$, armonica in Ω , con Ω aperto di \mathbb{R}^2 e limitato, e che sul bordo di Ω coincida con una funzione assegnata.*

Dim. Infatti se ne esistessero due u_1, u_2 la loro differenza $u_1 - u_2$ sarebbe una funzione armonica in Ω , continua in $\bar{\Omega}$ e nulla in $\partial\Omega$. Il corollario precedente dimostra che $u_1 - u_2$ è identicamente nulla in Ω . ■

Il seguente teorema va sotto il nome di *principio del massimo modulo per funzioni olomorfe*. Qui ne diamo una dimostrazione che fa uso dei concetti dimostrati in precedenza.

Corollario 2.3 *Sia f olomorfa su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, con $f(z) \neq 0$ in Ω . Se f non è costante allora $|f|$ non ha estremi in Ω .*

Dim. Fissiamo una determinazione del logaritmo complesso \log in modo che $\log(x)$ sia reale per $x \in \mathbb{R}^+$. L'ipotesi che $f(z)$ sia sempre diversa da 0 garantisce che la funzione $\log f(z)$ sia ben definita ed olomorfa in Ω . La funzione $u(x, y) := \log |f(x + iy)|$ è la parte reale di $\log(f(x + iy))$ e quindi è armonica in Ω . Si osservi che u non è costante (perché altrimenti $|f|$ lo sarebbe, ma allora lo sarebbe f stessa, vd. la Oss. 2.2 seguente). Ma allora u non ha estremi locali, e quindi (per la monotonia del logaritmo reale) neanche $|f|$ può averne. ■

Oss. 2.2 Nella dimostrazione precedente si è accennato al seguente fatto: se f è olomorfa in un aperto connesso e $|f|$ è costante allora f stessa è costante. Di seguito diamo una dimostrazione semplice ed istruttiva di questa affermazione. Anzitutto osserviamo che possiamo limitarci a considerare il caso in cui l'aperto in questione contenga \mathbf{o} , visto che ci si riconduce a questa situazione semplicemente con una traslazione. Per r sufficientemente piccolo abbiamo quindi che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $|z| < r$, con convergenza uniforme. Consideriamo $\frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma} |f(z)|^2 ds$ dove γ è la circonferenza di raggio r . L'ipotesi che $|f|$ sia costante consente di affermare

che tale integrale vale $|f(0)|^2$ ovvero $|a_0|^2$. D'altra parte, la convergenza uniforme consente di concludere che

$$\begin{aligned} |a_0|^2 &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma} |f(z)|^2 ds = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma} \sum_{n,m} a_n \bar{a}_m z^n \bar{z}^m ds \\ &= \sum_{n,m} a_n \bar{a}_m \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma} z^n \bar{z}^m ds = \sum_{n,m} a_n \bar{a}_m r^{n+m+1} \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \sum_{n,m} a_n \bar{a}_m r^{n+m} \delta_{n=m} = \sum_n |a_n|^2 r^{2n} \end{aligned}$$

quindi $a_n = 0$ per ogni $n > 0$, ovvero f è costante. \square

Nel corollario precedente l'ipotesi $|f(z)| \neq 0$ in Ω è essenziale per la tesi, visto che ogni eventuale zero di f produrrebbe automaticamente un minimo locale per $|f|$. Se invece si è interessati ai soli (eventuali) massimi allora si può eliminare quella ipotesi poiché vale il seguente risultato.

Corollario 2.4 *Sia f continua in $\bar{\Omega}$ e olomorfa in $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, con Ω aperto limitato. Allora $\|f\|_{\infty, \bar{\Omega}} = \|f\|_{\infty, \partial\Omega}$.*

Dim. La dimostrazione che diamo di seguito vuole utilizzare il corollario precedente, e ciò con l'intenzione di ricavare il risultato a partire da informazioni sulle funzioni armoniche. Segnaliamo però che di questa affermazione è possibile dare dimostrazioni più semplici che utilizzano l'analisi complessa.

Se f è identicamente nulla o costante la tesi è evidentemente vera. Supponiamo dunque che esista $z_0 \in \Omega$ con $f(z_0) \neq 0$ e che f non sia costante. Fissiamo ε positivo ma soddisfacente $\varepsilon < |f(z_0)|$. Sia poi $\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : |f(z)| > \varepsilon\}$. Tale insieme non è vuoto ed è certamente un aperto (per la continuità di $|f|$). In Ω_ε la funzione f è olomorfa ed è continua in $\bar{\Omega}_\varepsilon$. Inoltre $f(z) \neq 0$ in Ω_ε quindi ad $|f|$ possiamo applicare il Cor. 2.3 ottenendo che $|f|$ non ha estremanti in Ω_ε . Ne segue che $\|f\|_{\infty, \bar{\Omega}_\varepsilon} = \|f\|_{\infty, \partial\Omega_\varepsilon}$. D'altra parte $\|f\|_{\infty, \bar{\Omega}_\varepsilon} = \|f\|_{\infty, \bar{\Omega}}$, poiché nei punti di $\bar{\Omega} \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon$ il valore assoluto di f assume valori minori od uguali a ε e quindi inferiori a quello assunto in z_0 che sta in Ω_ε . Analogamente, $\|f\|_{\infty, \partial\Omega_\varepsilon} = \|f\|_{\infty, \partial\Omega}$, poiché nei punti di $\partial\Omega_\varepsilon$ che non siano in $\partial\Omega$ la funzione $|f|$ assume valori minori od uguali ad ε . Abbiamo così provato che

$$\|f\|_{\infty, \bar{\Omega}} = \|f\|_{\infty, \bar{\Omega}_\varepsilon} = \|f\|_{\infty, \partial\Omega_\varepsilon} = \|f\|_{\infty, \partial\Omega},$$

che è la tesi. \blacksquare

Il teorema seguente mostra che la formula del valor medio non è solo una conseguenza della armonicità di u ma in realtà è equivalente ad essa.

Teorema 2.4 *Sia u di classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ con Ω aperto di \mathbb{R}^2 . Supponiamo che per ogni $\mathbf{p} \in \Omega$ e per ogni r sufficientemente piccolo si abbia*

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{p} + r(\cos \theta, \sin \theta)) d\theta.$$

Allora u è armonica in Ω .

In seguito dimostreremo che l'ipotesi $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ nel teorema precedente può essere sostituita dalla sola continuità (vd. Teo. 2.9).

Dim. Per assurdo supponiamo esista un punto \mathbf{p} fissato tale che $\Delta u(\mathbf{p}) \neq 0$. Dalla continuità di Δu segue allora che possiamo supporre che $\Delta u > 0$ in $B_r(\mathbf{p})$ se r è in un intervallo $(0, \varepsilon)$ sufficientemente piccolo. Sia $\varphi(r) := \int_0^{2\pi} u(\mathbf{p} + r(\cos \theta, \sin \theta)) d\theta$. La funzione φ è derivabile in $(0, \varepsilon)$, con derivata che può essere calcolata derivando sotto il segno di integrale (perché u è \mathcal{C}^1), ottenendo:

$$\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} (\partial_x u|_{\mathbf{p}+r(\cos \theta, \sin \theta)} \cos \theta + \partial_y u|_{\mathbf{p}+r(\cos \theta, \sin \theta)} \sin \theta) d\theta.$$

In modo più compatto questo integrale può essere scritto come integrale di una forma differenziale sulla circonferenza di raggio r e centro \mathbf{p} , orientata in senso antiorario

$$= \frac{1}{r} \int_{\partial B_r(\mathbf{p})} \partial_x u|_{\mathbf{x}} dy - \partial_y u|_{\mathbf{x}} dx$$

ed usando le formule di Green-Gauss (qui usiamo il fatto che u è \mathcal{C}^2)

$$= \frac{1}{r} \int_{B_r(\mathbf{p})} (\Delta u)|_{\mathbf{x}} dx dy.$$

Per ipotesi φ è costante, quindi dalla formula precedente segue $\int_{B_r(\mathbf{p})} \Delta u dx dy = 0$ per ogni $r \in (0, \varepsilon)$, ma questo contraddice l'ipotesi. ■

2.4. Funzioni armoniche in coordinate polari

Il nostro prossimo obiettivo è risolvere il seguente problema di Dirichlet

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \\ u = h & \text{su } \partial B_1 \end{cases}$$

dove h è una funzione continua in ∂B_1 e la funzione cercata u è \mathcal{C}^2 in (B_1) e \mathcal{C} in $\overline{B_1}$. Data la simmetria radiale del dominio si rivelerà una buona idea riscrivere l'operatore differenziale passando ad un sistema di coordinate in cui il dominio

+

+

B_1 appaia come un rettangolo (questo per poter poi usare il metodo di separazione delle variabili). Ricordiamo che il diffeomorfismo delle coordinate polari è localmente espresso dalla coppia di relazioni:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{cases}.$$

Tuttavia tale coppia di trasformazioni realizzano un diffeomorfismo solo su opportuni aperti di \mathbb{R}^2 , in particolare essi non definiscono un diffeomorfismo del disco B_1 . In questo senso non abbiamo la certezza che procedendo in questo modo si possa poi effettivamente ottenere la soluzione al problema cercato. Pur consci di questo problema procediamo nel calcolo. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \partial_x &= \frac{x}{r} \partial_r - \frac{y}{r^2} \partial_\theta = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \\ \partial_y &= \frac{y}{r} \partial_r + \frac{x}{r^2} \partial_\theta = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta \end{aligned}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} \partial_x^2 &= \left(\cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \right)^2 = \cos^2 \theta \partial_r^2 + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \partial_\theta - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \partial_r \partial_\theta \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \partial_r + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \partial_\theta + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \partial_\theta^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_y^2 &= \left(\sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta \right)^2 = \sin^2 \theta \partial_r^2 - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \partial_\theta + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \partial_r \partial_\theta \\ &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{r} \partial_r - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \partial_\theta + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \partial_\theta^2 \end{aligned}$$

per cui

$$(2.4) \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2.$$

Viste le citate difficoltà legate alla natura di (non) diffeomorfismo della trasformazione delle coordinate polari, chiamiamo *laplaciano polare* l'operatore differenziale

$$\Delta_{r,\theta} = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2.$$

Risolviamo ora l'equazione di Laplace polare $\Delta_{r,\theta} g(r, \theta) = 0$ per separazione delle variabili. Cerchiamo quindi soluzioni della forma $g(r, \theta) := g_1(r)g_2(\theta)$ con g_1 e g_2 di classe \mathcal{C}^2 in opportuni domini che fisseremo in seguito. L'equazione $\Delta_{r,\theta} g_1(r)g_2(\theta) = 0$ diventa

$$0 = g_2(\theta) \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) g_1(r) + \frac{g_1(r)}{r^2} \partial_\theta^2 g_2(\theta)$$

+

+

e supponendo il prodotto $g_1(r)g_2(\theta)$ non identicamente nullo possiamo dividere per esso ottenendo

$$\frac{r^2}{g_1(r)}(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r)g_1(r) = -\frac{1}{g_2(\theta)}\partial_\theta^2 g_2(\theta).$$

I due membri dell'equazione coinvolgono variabili distinte, quindi deve esistere una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$r^2\partial_r^2 g_1(r) + r\partial_r g_1(r) = \lambda g_1(r) \quad , \quad \partial_\theta^2 g_2(\theta) = -\lambda g_2(\theta).$$

La selezione delle soluzioni g_1 e g_2 dipende da quale sia il dominio su cui si intende risolvere l'equazione. Per superare la difficoltà derivante dal fatto che il diffeomorfismo delle coordinate polari non è un diffeomorfismo su \mathbb{R}^2 è necessario che g_2 sia 2π periodica. L'equazione differenziale per g_2 ha soluzioni di questo tipo solo per $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, della forma $g_2(\theta) = \alpha \sin(n\theta) + \beta \cos(n\theta)$. Per tale valore di λ l'equazione per g_1 diventa

$$r^2\partial_r^2 g_1(r) + r\partial_r g_1(r) - n^2 g_1(r) = 0$$

che è una equazione di Eulero. Le sue soluzioni sono:

$$\begin{aligned} \text{se } n > 0 \quad & \alpha' r^n + \beta' r^{-n}, \\ \text{se } n = 0 \quad & \alpha' + \beta' \log r, \end{aligned} \quad \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$$

Tra le possibili funzioni g_1 qui sopra evidenziate, occorre selezionare quelle che siano regolari in 0 e tra queste, solo quelle che in 0 si annullano possono essere accoppiate con una parte angolare g_2 che non sia costante: questo perché altrimenti la funzione $g_1(r)g_2(\theta)$ darebbe luogo ad una funzione del piano cartesiano x, y (la funzione $g_1(\sqrt{x^2 + y^2})g_2(\arctan(y/x))$) che non ammetterebbe un prolungamento continuo in \mathbf{o} . Ciò significa che le soluzioni che possiamo considerare sono le seguenti:

$$\{1\} \cup \{r^n \cos(n\theta), r^n \sin(n\theta)\}_{n=1}^\infty.$$

In effetti, la funzione $r^n \cos(n\theta)$ può essere vista come la parte reale di $(re^{i\theta})^n$ e quindi produce, una volta tornati al piano xy , la funzione $\text{Re}((x + iy)^n)$: tale funzione è evidentemente regolare visto che è un polinomio in x, y . Una analoga considerazione mostra che anche $r^n \sin(n\theta)$ produce, una volta tornati al piano xy , una funzione regolare.

Torniamo ora al problema di Dirichlet (2.3) da cui siamo partiti. Alla funzione h associamo la sua serie di Fourier:

$$h \rightsquigarrow \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos(n\theta) + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin(n\theta) \right).$$

La continuità di h non è sufficiente a garantire la convergenza puntuale ad h di tale serie, ma si ha certamente convergenza ad h in $L^2(\partial B_1)$. In particolare la relazione

di Parseval $\int_0^{2\pi} |h(\theta)|^2 d\theta = |a_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$ garantisce la convergenza di tale serie e quindi che $a_n, b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

La forma delle soluzioni separabili suggerisce di considerare la funzione

$$(2.5) \quad u(r, \theta) := \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} r^n \cos(n\theta) + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} r^n \sin(n\theta) \right).$$

In effetti tale funzione converge certamente in $(r, \theta) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}$, visto che i coefficienti decadono con n almeno esponenzialmente per via della presenza dei termini r^n (mentre abbiamo visto che $a_n, b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$). Tale funzione è inoltre di classe \mathcal{C}^∞ , visto che le derivate parziali in r ed in θ si limitano ad aumentare i coefficienti della serie di un fattore polinomiale in n (così che le serie delle derivate parziali convergono uniformemente sui compatti di $(-1, 1) \times \mathbb{R}$). Non solo, ma visto che le sue derivate parziali possono essere calcolate derivando termine a termine, è chiaro che tale funzione soddisfa anch'essa l'equazione $\Delta_{r,\theta} u = 0$ (poiché ogni funzione $r^n \cos(n\theta)$ ed $r^n \sin(n\theta)$ lo fa).

È interessante riscrivere tale soluzione inserendo esplicitamente la dipendenza da h dei coefficienti a_n, b_n . Sappiamo che

$$a_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} h(\omega) d\omega,$$

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} h(\omega) \cos(n\omega) d\omega, \quad b_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} h(\omega) \sin(n\omega) d\omega.$$

Si ha così che

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[r^n \int_0^{2\pi} h(\omega) (\cos(n\omega) \cos(n\theta) + \sin(n\omega) \sin(n\theta)) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[r^n \int_0^{2\pi} h(\omega) \cos(n(\theta - \omega)) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[r^n \int_0^{2\pi} h(\omega) (e^{in(\theta-\omega)} + e^{-in(\theta-\omega)} - \delta_{n=0}) d\omega \right]. \end{aligned}$$

L'ipotesi $r < 1$ e la limitatezza di h che deriva dalla sua continuità consentono di commutare serie ed integrale, ottenendo

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \left[\sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in(\theta-\omega)} - 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{-in(\theta-\omega)} \right] d\omega \\ (2.6) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \left[\frac{1}{1 - r e^{i(\theta-\omega)}} - 1 + \frac{1}{1 - r e^{-i(\theta-\omega)}} \right] d\omega \end{aligned}$$

+

+

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \left[\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\omega) + r^2} \right] d\omega.$$

La funzione

$$K(r, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \omega + r^2}$$

è nota col nome di *nucleo di Poisson*. Abbiamo così trovato che per $r < 1$, la soluzione del problema di Dirichlet si scrive come integrale di convoluzione

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} h(\omega) K(r, \theta - \omega) d\omega.$$

Il nucleo $K(r, \omega)$ condivide con varie altre funzioni (note col nome di *approssimazioni dell'unità*) le seguenti proprietà:

p1) è continua in ω e 2π -periodica per ogni valore di $r < 1$,

p2) è a valori non negativi e $\int_0^{2\pi} K(r, \omega) d\omega = 1$ per ogni valore di $r < 1$,

p3) per ogni valore di $\epsilon > 0$, $\lim_{r \rightarrow 1^-} K(r, \omega) = 0$ uniformemente per $\omega \in D_\epsilon$ dove $D_\epsilon := \{\omega : |\omega - 2\pi n| > \epsilon \forall n \in \mathbb{Z}\}$.

Esse consentono di dimostrare, con una procedura che è standard¹, la seguente affermazione.

Teorema 2.5 *Supponendo h continua in ∂B_1 , la funzione che in B_1 è definita da*

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} h(\omega) K(r, \theta - \omega) d\omega$$

ammette prolungamento continuo in $\overline{B_1}$ con $u(1, \theta) = h(\theta)$.

Dim. Visto che la continuità di u in B_1 è ovvia, ciò che resta da dimostrare è che per ogni θ si ha

$$\lim_{(r, \theta') \rightarrow (1^-, \theta)} \int_0^{2\pi} h(\omega) K(r, \theta' - \omega) d\omega = h(\theta).$$

La periodicità di h ed K mostrano che

$$\int_0^{2\pi} h(\omega) K(r, \theta' - \omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta' - \omega) K(r, \omega) d\omega,$$

inoltre da p2) segue che

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\pi} h(\omega) K(r, \theta' - \omega) d\omega - h(\theta) \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} [h(\theta' - \omega) - h(\theta)] K(r, \omega) d\omega \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [\tau_\omega h(\theta') - h(\theta)] K(r, \omega) d\omega \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\tau_\omega h(\theta') - h(\theta)| K(r, \omega) d\omega. \end{aligned}$$

¹E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton Lectures in Analysis III, Princeton, NJ, 2005, Teo. 2.1.

+

+

Dobbiamo dunque mostrare che questa quantità è arbitrariamente piccola pur di prendere r sufficientemente vicino a 1 e θ' vicino a θ . Per farlo anzitutto introduciamo $h(\theta')$ nell'ultima espressione così che dalla solita disuguaglianza triangolare e da p2) segue che

$$\begin{aligned} &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\tau_{\omega}h(\theta') - h(\theta')|K(r, \omega) d\omega + \int_{-\pi}^{\pi} |h(\theta) - h(\theta')|K(r, \omega) d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |\tau_{\omega}h(\theta') - h(\theta')|K(r, \omega) d\omega + |h(\theta) - h(\theta')|. \end{aligned}$$

La continuità di h garantisce che la quantità $|h(\theta) - h(\theta')|$ può essere resa arbitrariamente piccola. Occorre quindi stimare il primo integrale. Per farlo fissiamo $\epsilon > 0$ e separiamo l'integrale nelle due parti:

$$\int_{(-\epsilon, \epsilon)} |\tau_{\omega}h(\theta') - h(\theta')|K(r, \omega) d\omega + \int_{(-\epsilon, \epsilon)^c} |\tau_{\omega}h(\theta') - h(\theta')|K(r, \omega) d\omega.$$

Il primo integrale può essere stimato da

$$\begin{aligned} &\sup_{\omega \in (-\epsilon, \epsilon)} \{ \|\tau_{\omega}h - h\|_{\infty} \} \int_{(-\epsilon, \epsilon)} K(r, \omega) d\omega \leq \sup_{\omega \in (-\epsilon, \epsilon)} \{ \|\tau_{\omega}h - h\|_{\infty} \} \int_{[-\pi, \pi]} K(r, \omega) d\omega \\ &\leq \sup_{\omega \in (-\epsilon, \epsilon)} \{ \|\tau_{\omega}h - h\|_{\infty} \} \end{aligned}$$

e questa quantità può essere resa arbitrariamente piccola prendendo ϵ opportunamente piccolo poiché la continuità di h sul compatto $[0, 2\pi]$ (e quindi la sua uniforme continuità su tale dominio) garantisce che $\lim_{\omega \rightarrow 0} \|\tau_{\omega}h - h\|_{\infty} = 0$ (vd. la Prop. 1.3). Si osservi che questa stima è uniforme in θ' . Il secondo integrale può essere stimato invece da

$$\int_{(-\epsilon, \epsilon)^c} |\tau_{\omega}h(\theta') - h(\theta')|K(r, \omega) d\omega \leq 2\|h\|_{\infty} \int_{(-\epsilon, \epsilon)^c} K(r, \omega) d\omega$$

ed una volta fissato ϵ anche questa espressione può essere resa arbitrariamente piccola prendendo r sufficientemente vicino a 1 grazie a p3). ■

La formula (2.6) può essere rielaborata dicendo che

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \operatorname{Re} \left[\frac{1 + re^{i(\theta-\omega)}}{1 - re^{i(\theta-\omega)}} \right] d\omega$$

che mostra che $u = \operatorname{Re}F$ dove

$$F(r \cos \theta, r \sin \theta) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \left[\frac{1 + re^{i(\theta-\omega)}}{1 - re^{i(\theta-\omega)}} \right] d\omega.$$

Tornando alla variabile complessa $z = re^{i\theta}$ tale funzione è espressa da

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \left[\frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z} \right] d\omega.$$

Da questa espressione integrale si dimostra facilmente che F è olomorfa in B_1 (per esempio verificando che essa è continua e che $\int_\gamma F(z) dz = 0$ per qualsiasi curva γ regolare, chiusa e contenuta in B_1). Possiamo finalmente enunciare il seguente teorema.

Teorema 2.6 *Sia $h: \partial B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \\ u = h & \text{su } \partial B_1, \end{cases} \quad u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$$

ha una soluzione data in B_1 da

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\omega) \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\omega} + x + iy}{e^{i\omega} - x - iy} \right] d\omega.$$

Tale soluzione è unica a causa del Corollario 2.2.

La dimostrazione di questo risultato è un semplice collage di quanto abbiamo via via dimostrato fino ad ora, tuttavia esso esprime una effettiva novità. C'è infatti una sottile ma importante differenza tra l'affermare che la funzione $u(r, \theta)$ considerata nella (2.5) è armonica rispetto al laplaciano polare $\Delta_{r, \theta}$ e l'affermare che la funzione $\tilde{u}(x, y)$ definita nel teorema precedente è soluzione del problema di Dirichlet in esame. Tale differenza deriva dal fatto che il passaggio dal laplaciano in coordinate cartesiane a quello in polari è governato da un diffeomorfismo che però è tale solo su una parte del piano \mathbb{R}^2 . Nel passare quindi da una mappa $u(r, \theta)$ armonica nel piano (r, θ) rispetto al laplaciano polare alla mappa $\tilde{u}(x, y) := u(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))$ non è detto che si ottenga una mappa ben definita nella regione del piano (x, y) che ci interessa. Il teorema precedente mostra però che nel caso in esame non vi sono difficoltà di questo tipo.

Oss. 2.3 Il Teo. 2.6 mostra che è possibile definire una mappa che associa ad $h \in C(\partial B_1)$ la soluzione di quel problema di Dirichlet. Tale soluzione infatti è unica (per il Cor. 2.2) ed esiste, appunto per il Teo. 2.6. Abbiamo così un operatore S definito dallo spazio di Banach $(C(\partial B_1), \|\cdot\|_{\infty, \partial B_1})$ allo spazio di Banach $(C(\overline{B_1}), \|\cdot\|_{\infty, \overline{B_1}})$. Tale operatore è evidentemente lineare e il Teo. 2.3 mostra che esso conserva la norma. In particolare è continuo. Abbiamo quindi dimostrato che il problema di Dirichlet analizzato nel Teo. 2.6 non solo ammette una ed una sola soluzione, ma essa dipende in modo continuo dal dato di bordo h . Si tratta di una proprietà particolarmente importante: essa ad esempio è essenziale per ogni studio di tipo “numerico” del problema in esame poiché direttamente

connessa al problema della “stabilità” della soluzione in funzione del dato al bordo. \square

2.5. Applicazioni della formula di Poisson

Sia u una funzione armonica in un aperto Ω e sia $\mathbf{p} \in \Omega$. Sia R sufficientemente piccolo perché il disco chiuso $\overline{B_R(\mathbf{p})}$ sia contenuto in Ω . La funzione u_R definita ponendo $u_R(x, y) := u(\mathbf{p} + R(x, y))$ risulta armonica in un aperto contenente $\overline{B_1}$. Applicando quindi il Teo. 2.6 con $h(\theta) := u_R(\cos \theta, \sin \theta) = u(\mathbf{p} + (R \cos \theta, R \sin \theta))$ si dimostra la seguente formula di rappresentazione

Teorema 2.7 *Sia u armonica in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, sia $\mathbf{p} \in \Omega$ e sia R tale che $\overline{B_R(\mathbf{p})} \subseteq \Omega$. Allora, per ogni $|z| < R$ si ha*

$$u(\mathbf{p} + z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{p} + Re^{i\omega}) \operatorname{Re} \left[\frac{Re^{i\omega} + z}{Re^{i\omega} - z} \right] d\omega.$$

Le seguenti identità sono formulazioni equivalenti alla precedente. La prima è particolarmente elegante e mostra tutta la somiglianza di tale formula di rappresentazione con l'integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe:

$$(2.7) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\mathbf{p})} u(w) \operatorname{Re} \left[\frac{w + z}{w - z} \right] ds \quad \forall z, |z - \mathbf{p}| < R.$$

La seconda ha invece il vantaggio di essere esplicita:

$$(2.8) \quad u(\mathbf{p} + (r \cos \theta, r \sin \theta)) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{p} + (R \cos \omega, R \sin \omega)) \left[\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \omega) + r^2} \right] d\omega. \quad \forall r < R.$$

È noto che la funzione limite di una successione di funzioni derivabili può non essere derivabile a sua volta, così come è noto che la funzione limite di una successione di funzioni C^∞ non è detto sia a sua volta C^∞ , e ciò anche in presenza di convergenza uniforme. La regolarità che deriva dall'essere armoniche, invece, è tanto forte da passare alla funzione limite. Ciò è quanto afferma il seguente teorema dovuto a Harnack.

Teorema 2.8 (Harnack) *Siano u_n funzioni armoniche in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Supponiamo che la successione u_n converga ad una funzione u in Ω , uniformemente sui compatti di Ω . Allora u è armonica in Ω .*

Dim. Fissiamo un punto $\mathbf{p} \in \Omega$ ed un $R > 0$ sufficientemente piccolo perché $\overline{B_R(\mathbf{p})} \subseteq \Omega$. In $B_R(\mathbf{p})$ ciascuna delle u_n ammette la rappresentazione

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\mathbf{p})} u_n(w) \operatorname{Re} \left[\frac{w + z}{w - z} \right] ds.$$

Visto che l'integrale è su un dominio compatto e che $u_n(w)\operatorname{Re}\left[\frac{w+z}{w-z}\right]$ converge uniformemente su tale dominio a $u(w)\operatorname{Re}\left[\frac{w+z}{w-z}\right]$, passando al limite per $n \rightarrow \infty$ nella relazione precedente si ha

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\mathbf{p})} u(w)\operatorname{Re}\left[\frac{w+z}{w-z}\right] ds.$$

Ma l'integrale che compare a destra definisce una funzione armonica in $B_R(\mathbf{p})$, quindi u è armonica in tale dominio. La tesi segue dalla arbitrarietà di \mathbf{p} . ■

Usando poi la formula di rappresentazione (2.8) possiamo finalmente dimostrare il seguente risultato annunciato in precedenza (vd. Teo. 2.4).

Teorema 2.9 *Sia u continua in Ω aperto di \mathbb{R}^2 . Supponiamo che per ogni $\mathbf{p} \in \Omega$ e per ogni r sufficientemente piccolo si abbia*

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{p} + r(\cos \theta, \sin \theta)) d\theta.$$

Allora u è armonica in Ω .

Dim. L'essere armoniche è una nozione locale, di conseguenza per dimostrare la tesi possiamo limitarci a considerare il caso in cui Ω contiene \mathbf{o} , e \mathbf{p} coincide con \mathbf{o} . Sia dunque $R' > 0$ tale che $B_{R'}$ sia contenuto in Ω strettamente, così che $\overline{B_{R'}} \subset \Omega$. Fissiamo $R < R'$. Sia w la soluzione del problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } B_R \\ w = u & \text{su } \partial B_R, \end{cases} \quad w \in \mathcal{C}^2(B_R) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R}).$$

Il Teo. 2.6 garantisce che tale soluzione esiste. La funzione w (in quanto armonica) ha la proprietà del valor medio in B_R . Anche u ha tale proprietà (per ipotesi), quindi anche $w - u$ ha tale proprietà (per linearità). La funzione $g := w - u$ è quindi continua in $\overline{B_R}$, nulla in ∂B_R e gode della proprietà del valor medio in B_R . La tesi segue allora osservando che g è nulla sul bordo ∂B_R e che il fatto di godere della proprietà della media è sufficiente per dimostrare il principio del massimo in $\overline{B_R}$. Infatti, sia \mathbf{q} un punto di $\overline{B_R}$ in cui g ha massimo modulo; a meno di cambiare g con $-g$ possiamo supporre che g stessa abbia massimo in \mathbf{q} . Supponiamo che tale punto si trovi in B_R . Dunque per $\varepsilon > 0$ e sufficientemente piccolo si ha $g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{q})$ se $|\mathbf{x} - \mathbf{q}| < \varepsilon$ mentre dalla proprietà del valor medio segue che

$$0 = g(\mathbf{q}) - g(\mathbf{q}) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{B_\varepsilon(\mathbf{q})} (g(\mathbf{q}) - g(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \geq 0$$

così che di fatto $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{q})$ in $B_\varepsilon(\mathbf{q})$. Questo argomento mostra che l'insieme $D := \{\mathbf{x} \in B_R : g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{q})\}$ è un aperto in B_R . D'altra parte anche $B_R \setminus D^c$ è un aperto, visto che esso coincide con $\{\mathbf{x} \in B_R : g(\mathbf{x}) < g(\mathbf{q})\}$. La connessione di B_R garantisce che D^c è vuoto per cui g è costante in B_R . Visto che g è identicamente

nulla in ∂B_R , ne deduciamo che $g = 0$ in B_R . Ciò significa che $u = w$ in B_R , ma w è armonica in B_R , quindi anche u lo è. ■

Le funzioni che risultano armoniche nell'intero piano godono di particolari proprietà, proprio come accade per le funzioni che siano olomorfe nell'intero dominio \mathbb{C} . Una di queste ha a che fare con la crescita che tali funzioni possono avere per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Il famoso teorema di Liouville afferma che una funzione olomorfa in \mathbb{C} che risulti anche limitata deve necessariamente essere costante. Un corollario di tale teorema, e che di fatto lo generalizza, afferma che se la funzione cresce al più come una potenza di z allora essa è necessariamente un polinomio di grado minore o uguale a quella potenza. Tale risultato è vero anche per le armoniche di \mathbb{R}^2 . Di seguito ne diamo una dimostrazione che, secondo lo spirito di questo capitolo, utilizza proprio il teorema valido per le olomorfe.

Teorema 2.10 (Liouville) *Sia u armonica in \mathbb{R}^2 . Se $|u(\mathbf{x})| \leq (1 + |\mathbf{x}|)^k$ per qualche k allora u è un polinomio di grado al più k .*

Dim. La formula (2.7), centrata in \mathbf{o} , mostra che per $|z| < R$ si ha

$$u(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u(w) \operatorname{Re} \left[\frac{w+z}{w-z} \right] ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\omega}) \operatorname{Re} \left[\frac{Re^{i\omega} + z}{Re^{i\omega} - z} \right] d\omega.$$

Una funzione olomorfa associata ad u è quindi la funzione

$$(2.9) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\omega}) \left[\frac{Re^{i\omega} + z}{Re^{i\omega} - z} \right] d\omega$$

valida per ogni $R > 0$ e per ogni z con $|z| < R$. Nella (2.9) consideriamo i punti z con $|z| = r$ ed $R = 2r$. Sotto tale ipotesi si ha che

$$\left| \frac{Re^{i\omega} + z}{Re^{i\omega} - z} \right| \leq \frac{R + |z|}{R - |z|} = 3$$

e quindi da tale formula si deduce che F soddisfa la stima $|F(z)| \leq 3(1 + 2|z|)^k$. Per il teorema di Liouville già citato ciò implica che F stessa è un polinomio in z di grado $\leq k$. Di conseguenza anche u (che è la parte reale di F) è un polinomio (in x, y) di grado totale $\leq k$. ■

+

+

CAPITOLO 3

Funzioni armoniche in \mathbb{R}^n

Def. 3.1 (f. armonica) Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ a valori in \mathbb{R} che soddisfa l'equazione

$$\Delta u := \partial_{x_1}^2 u + \cdots + \partial_{x_n}^2 u = 0$$

è detta *armonica* in Ω .

Sia B_r la bolla aperta di centro \mathbf{o} e raggio r . Sia S_r^{n-1} la sfera $n-1$ dimensionale (quindi la sfera di \mathbb{R}^n) di raggio r e centro \mathbf{o} . Chiaramente $S_r^{n-1} = \partial B_r$. Sia poi meas_n la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e meas_{n-1} la misura superficiale su S_r . Si osservi che per l'omogeneità delle misure si ha

$$\text{meas}_n(B_r) = r^n \text{meas}_n(B_1) \quad , \quad \text{meas}_{n-1}(S_r^{n-1}) = r^{n-1} \text{meas}_{n-1}(S_1^{n-1}).$$

Visto la frequenza con cui le costanti $\text{meas}_n(B_1)$ e $\text{meas}_{n-1}(S_1^{n-1})$ appariranno, poniamo

$$\mu_n := \text{meas}_n(B_1), \quad \sigma_n := \text{meas}_{n-1}(S_1^{n-1}).$$

Il valore esatto di tali quantità è noto, essendo pari a

$$\mu_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}, \quad \sigma_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

dove Γ è la funzione gamma di Eulero. Di seguito useremo solo saltuariamente il valore di tali costanti mentre frequentemente useremo la relazione $\sigma_n = n\mu_n$.

Teorema 3.1 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia u una funzione di classe \mathcal{C}^2 in Ω . Allora le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:*

- 1) u è armonica in Ω ,
- 2) per ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo

$$(3.1) \quad u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S_r^{n-1}} u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) d\sigma,$$

- 3) per ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo

$$(3.2) \quad u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\mu_n r^n} \int_{B_r} u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

+

+

Le formule (3.1)-(3.2) esprimono quella che viene chiamata *proprietà del valor medio* per le funzioni armoniche: la prima afferma che il valore che u assume al centro di una sfera $n - 1$ dimensionale (e di raggio sufficientemente piccolo) è pari al valore medio dei valori che u assume su tale sfera, mentre la seconda afferma che il valore che u assume al centro di una bolla n dimensionale è pari al valore medio dei valori che u assume su tale bolla.

Dim. Dimostriamo che 1) \implies 2).

Basta dimostrare la tesi in $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$, poiché la tesi per un generico \mathbf{x}_0 segue da questa per traslazione di assi. Sia φ la funzione definita nel modo seguente:

$$\varphi(r) := \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S_r^{n-1}} u(\mathbf{x}) \, d\sigma.$$

Tenuto conto della omogeneità della misura tale espressione equivale a

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1^{n-1}} u(r\mathbf{x}) \, d\sigma.$$

Per ipotesi u ha derivate parziali continue ed il dominio di integrazione è compatto: è noto che tali ipotesi garantiscono la derivabilità di φ e la possibilità di calcolarne la derivata derivando sotto il segno di integrale. Si ha cioè

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1^{n-1}} \langle \nabla u|_{r\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \, d\sigma$$

Sia $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ il campo vettoriale ortogonale alla superficie della bolla unitaria che in ogni punto \mathbf{x} dà la normale esterna alla bolla. Si osservi che $\boldsymbol{\nu}$ è diretto come \mathbf{x} (ma ha diverso punto di applicazione) con $\langle \nabla u|_{r\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle = \langle \nabla u|_{r\mathbf{x}}, \boldsymbol{\nu} \rangle$. L'integrale a destra è quindi il flusso di ∇u attraverso S_1^{n-1} . In base al teorema della divergenza si ha

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{B_1} \operatorname{div}[\nabla u|_{r\mathbf{x}}] \, d\mathbf{x} = \frac{r}{\sigma_n} \int_{B_1} (\operatorname{div} \nabla) u|_{r\mathbf{x}} \, d\mathbf{x}$$

ma $\operatorname{div} \nabla u = \Delta u$ e tale quantità è nulla, per definizione di funzione armonica. Ne segue che $\varphi'(r) = 0$ ovvero che φ è costante. D'altra parte

$$\begin{aligned} |\varphi(r) - u(\mathbf{o})| &= \left| \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1^{n-1}} u(r\mathbf{x}) \, d\sigma - u(\mathbf{o}) \right| \\ &= \frac{1}{\sigma_n} \left| \int_{S_1^{n-1}} (u(r\mathbf{x}) - u(\mathbf{o})) \, d\sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1^{n-1}} |u(r\mathbf{x}) - u(\mathbf{o})| \, d\sigma. \end{aligned}$$

+

+

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per la continuità di u in \mathbf{o} esiste r' tale che $|u(r\mathbf{x}) - u(\mathbf{o})| < \varepsilon$ se $r < r'$, uniformemente in $\mathbf{x} \in S_1^{n-1}$. Per tali valori di r si ha

$$|\varphi(r) - u(\mathbf{o})| \leq \frac{\varepsilon}{\sigma_n} \int_{S_1^{n-1}} d\sigma = \varepsilon.$$

Ciò dimostra che $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) = u(\mathbf{o})$. Abbiamo così dimostrato che $\varphi(r) = u(\mathbf{o})$ per r sufficientemente piccolo, ovvero la (3.1).

Dimostriamo che 2) \implies 3).

Scriviamo ora la (3.1) nella forma

$$\sigma_n u(\mathbf{x}_0) R^{n-1} = \int_{S_R^{n-1}} u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) d\sigma$$

ed integriamo in R con $R \in (0, r)$. Otteniamo

$$\frac{\sigma_n}{n} u(\mathbf{x}_0) r^n = \int_0^r \left[\int_{S_R^{n-1}} u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) d\sigma \right] dR.$$

Il cambiamento di coordinate polari ed il teorema di Fubini mostrano che l'integrale doppio a destra altro non è che

$$\int_{B_r} u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

per cui la (3.2) segue immediatamente.

Dimostriamo che 3) \implies 2).

Basta invertire l'argomento precedente: una volta scritto l'integrale su B_r in polari, si ottiene la 2) derivando la 3) rispetto ad r .

Dimostriamo che 2) \implies 1).

Sia per assurdo $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ un punto in cui $\Delta u(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Cambiando u in $-u$, se necessario, possiamo supporre che $\Delta u(\mathbf{x}_0) > 0$. Possiamo inoltre supporre che \mathbf{x}_0 sia il punto \mathbf{o} . Consideriamo la funzione $\varphi(r)$ già introdotta in precedenza:

$$\varphi(r) := \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S_r^{n-1}} u(\mathbf{x}) d\sigma = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S_1^{n-1}} u(r\mathbf{x}) d\sigma.$$

Per ipotesi tale funzione è costante, quindi la sua derivata è nulla per ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo. D'altra parte abbiamo visto che

$$\varphi'(r) = \frac{r}{\sigma_n} \int_{B_1} \Delta u|_{r\mathbf{x}} d\mathbf{x}$$

per cui $\int_{B_r} \Delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ per ogni r piccolo. Questo evidentemente contraddice il fatto che $\Delta u > 0$ in una bolla B_r sufficientemente piccola. ■

+

+

In seguito avremo modo di dimostrare che le proprietà di valor medio consentono di dimostrare l'armonicità di u anche sotto la sola ipotesi di continuità (vd. Teo. 3.4).

Le proprietà legate al principio del massimo modulo per le armoniche di \mathbb{R}^2 erano state dedotte dalle corrispondenti proprietà di valor medio. Tali dimostrazioni possono quindi essere riprodotte qui, quasi senza variazione, a dare le analoghe proprietà per le armoniche di \mathbb{R}^n .

Teorema 3.2 *Sia u armonica in Ω , aperto connesso di \mathbb{R}^n . Se u ha estremanti assoluti in Ω allora è costante.*

Dim. Supponiamo che esista $\mathbf{p} \in \Omega$ in cui u ha un estremante assoluto. Cambiando u con $-u$, se necessario, possiamo supporre che l'estremante sia un massimo. Allora esiste r positivo e sufficientemente piccolo perché si abbia $B_r(\mathbf{p}) \subseteq \Omega$ e $u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{p})$ per $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{p})$. Di conseguenza in $B_r(\mathbf{p})$ si ha che $u(\mathbf{p}) - u(\mathbf{x}) \geq 0$ mentre dalla proprietà del valor medio nella forma (3.2) segue

$$\frac{1}{\mu_n r^n} \int_{B_r(\mathbf{p})} (u(\mathbf{p}) - u(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Ciò dimostra che $u(\mathbf{p}) - u(\mathbf{x})$ è quasi ovunque nulla in $B_r(\mathbf{p})$, ovvero che $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})$ per quasi ogni $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{p})$. D'altra parte u è continua, quindi in realtà $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})$ per ogni \mathbf{x} in $B_r(\mathbf{p})$. Ciò dimostra che u è costante in $B_r(\mathbf{p})$, ovvero che u è localmente costante in \mathbf{p} .

Sia dunque $\Omega_0 \subseteq \Omega$ l'insieme dei punti in cui u assume il valore $u(\mathbf{p})$; l'argomento precedente dimostra che Ω_0 è un aperto. D'altra parte anche l'insieme $\Omega \setminus \Omega_0$ è aperto, poiché esso coincide con l'insieme $\{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{p})\}$. Visto che per ipotesi Ω è connesso e visto che Ω_0 è non vuoto ne segue che $\Omega_0 = \Omega$ e quindi f è costante in Ω . ■

Si osservi che il teorema precedente è più debole dell'analogo in \mathbb{R}^2 (vd. Teo. 2.2): qui si nega l'esistenza di estremi assoluti, mentre in quello si negava addirittura l'esistenza di estremi relativi. Il motivo per cui ora possiamo dimostrare solo un risultato più debole è che per ora non sappiamo ancora se possano esistere funzioni armoniche non costanti in Ω e tuttavia costanti in una bolla aperta contenuta in Ω . Per le armoniche in \mathbb{R}^2 ciò è impossibile in virtù del loro legame con le olomorfe. Tale legame ovviamente manca per le armoniche in \mathbb{R}^n se $n > 2$. Vedremo tuttavia in seguito che anche le armoniche in \mathbb{R}^n sono analitiche in senso reale (vd. Teo. 3.7). Ciò consentirà di dimostrare l'assenza di estremi relativi (vd. Cor. 3.4).

Una importante variante del teorema precedente.

Teorema 3.3 (Principio del max.) *Sia u continua in $\overline{\Omega}$ e armonica in Ω , con Ω aperto di \mathbb{R}^n e limitato. Allora*

$$\|u\|_{\infty, \overline{\Omega}} = \|u\|_{\infty, \partial\Omega}.$$

Dim. L'esistenza del massimo è garantita da Weierstrass, visto che $\overline{\Omega}$ è compatto. Se u è costante la tesi è ovvia, se invece non è costante allora il sup di $|u|$ (che di fatto è un estremo per u) non può essere assunto in Ω per il teorema precedente. ■

Corollario 3.1 *Sia u continua in $\overline{\Omega}$ e armonica in Ω , con Ω aperto di \mathbb{R}^n e limitato. Se u è nulla sul bordo di Ω allora u è identicamente nulla in Ω .*

Oss. 3.1 Ecco una classica applicazione del teorema precedente all'elettrostatica. Sia C un conduttore cavo esposto ad un campo elettrostatico esterno ad esso. Le cariche sulla superficie di C libere di muoversi (per definizione di conduttore) migrano sotto il campo esterno fino a creare una distribuzione di carica che sia in equilibrio con esso. All'equilibrio, quindi, le cariche si dispongono in modo che la superficie di C sia equipotenziale (se così non fosse una eventuale differenza di potenziale provocherebbe un moto di cariche nel conduttore in modo da annullare tale differenza). Supponiamo poi che all'interno di C non vi siano cariche. Allora nello spazio delimitato da C il potenziale elettrostatico u è una soluzione dell'equazione $\Delta u = 0$ ed è costante su C . Il potenziale è sempre determinato a meno di una costante, quindi possiamo senz'altro supporre che il suo valore su C sia 0. Dunque, u è una funzione armonica nell'interno di C , con valore nullo sul bordo di C . Per il teorema precedente (dovendo il sup di $|u|$ all'interno di C essere uguale al sup della stessa quantità sulla superficie di C) possiamo concludere che u è nullo nell'intero spazio delimitato da C . In particolare dentro C non si manifesta alcuna forza elettrostatica. Questo fenomeno è noto con il nome di *gabbia di Faraday*. □

La linearità dell'operatore di Laplace ed il corollario precedente consentono di provare il seguente risultato di unicità della soluzione per un problema di Dirichlet.

Corollario 3.2 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Siano $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, continue entrambe nel proprio dominio. Allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

ha al più una soluzione.

Dim. Infatti se ne esistessero due u_1, u_2 la loro differenza $u_1 - u_2$ sarebbe una funzione armonica in Ω , continua in $\overline{\Omega}$ e nulla in $\partial\Omega$. Il corollario precedente dimostra che $u_1 - u_2$ è identicamente nulla in Ω . ■

3.1. Regolarità

Il teorema seguente è estremamente interessante poiché afferma che una funzione continua che goda della proprietà del valor medio è in realtà \mathcal{C}^∞ . Questo ha due conseguenze importanti. Anzitutto dimostra che le funzioni armoniche (che a

priori sono solo C^2), avendo anch'esse la proprietà del valor medio, sono necessariamente C^∞ . E poi che le funzioni continue con la proprietà del valor medio sono necessariamente armoniche. Un teorema successivo mostrerà che le continue con la proprietà del valor medio sono addirittura analitiche (in senso reale, ovviamente).

Teorema 3.4 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia u continua in Ω . Supponiamo che u goda in Ω della proprietà del valor medio, ovvero che per ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo perché $\overline{B_r(\mathbf{x}_0)} \subseteq \Omega$ si abbia*

$$u(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Allora u è C^∞ .

Dim. (Ripresa da Evans¹). Dimostriamo la tesi mostrando che $u = G_k * u$ dove G_k è un opportuno elemento di una famiglia di mollificatori a supporto compatto (vd. la definizione nella Sez. 1.5). La tesi seguirà allora dal fatto che tali convoluzioni producono sempre funzioni di classe C^∞ (vd. Prop. 1.6).

Sia dunque

$$g(\rho) := \begin{cases} \frac{1}{c} e^{1/(\rho^2-1)} & \text{per } 0 \leq \rho < 1 \\ 0 & \text{per } \rho \geq 1 \end{cases} \quad \text{con } c := \sigma_n \int_0^1 e^{1/(\rho^2-1)} \rho^{n-1} \, d\rho.$$

Sia poi $G(\mathbf{x}) := g(|\mathbf{x}|)$; si osservi che $G(\mathbf{x})$ è radiale, ha supporto in $\overline{B_1}$, è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed ha integrale in \mathbb{R}^n pari ad 1. Infine, per ogni $k > 0$ sia $G_k(\mathbf{x}) := k^n G(k\mathbf{x})$. Le G_k costituiscono una successione di mollificatori, ciascuna a supporto in $\overline{B_{1/k}}$. Si osservi che tali funzioni sono radiali e in ciò sono diverse dai mollificatori costruiti nella Sez. 1.5.

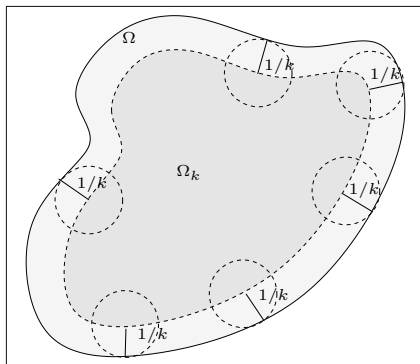


FIGURA 3.1.

¹L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

Sia $\Omega_k := \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > 1/k\}$. Tale insieme è sicuramente non vuoto pur di prendere k abbastanza grande, perché Ω è un aperto: d'ora in poi fissiamo k in modo che ciò accada (vd. Fig. 3.1). Sia u_k la funzione definita dalla convoluzione $G_k * u$ in Ω_k . Per $\mathbf{x}_0 \in \Omega_k$ si ha

$$u_k(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}^n} G_k(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Il punto \mathbf{x}_0 dista più di $1/k$ dal bordo di Ω e G_k ha supporto nella bolla di raggio $1/k$, quindi nell'integrale precedente ci si può limitare ad integrare nella bolla di raggio $1/k$ con centro in \mathbf{x}_0 , ovvero

$$u_k(\mathbf{x}_0) = \int_{B_{1/k}(\mathbf{x}_0)} G_k(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

In base alla definizione di G_k tale espressione è uguale a

$$u_k(\mathbf{x}_0) = k^n \int_{B_{1/k}(\mathbf{x}_0)} g(k|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}|)u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Eseguiamo ora l'integrazione utilizzando le coordinate polari e separando l'integrazione radiale da quella sulla superficie della bolla, autorizzati in ciò dal teorema di Fubini, ottenendo

$$u_k(\mathbf{x}_0) = k^n \int_0^{1/k} g(kr) \left[\int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{x}) \, d\sigma \right] dr.$$

Stiamo però assumendo che u soddisfi la proprietà del valor medio, per cui

$$\int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{x}) \, d\sigma = \sigma_n r^{n-1} u(\mathbf{x}_0),$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{x}_0) &= k^n \int_0^{1/k} g(kr) \sigma_n r^{n-1} u(\mathbf{x}_0) \, dr = u(\mathbf{x}_0) \cdot \sigma_n \int_0^{1/k} k^n g(kr) r^{n-1} \, dr \\ &= u(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\sigma_n}{c} \int_0^1 e^{1/(\rho^2-1)} \rho^{n-1} \, d\rho = u(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che in Ω_k la funzione u coincide con $u_k := G_k * u$. Quest'ultima è di classe C^∞ per la Prop. 1.6 quindi anche u è C^∞ in Ω_k . La tesi su Ω segue poi dal fatto che $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$. ■

Come accennato nella introduzione a questa sezione, il teorema precedente ha le seguenti importanti conseguenze.

Corollario 3.3 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.*

1. Se u è armonica in Ω allora è C^∞ in Ω .
2. Se u è continua in Ω ed ha proprietà del valor medio allora è armonica.
3. Se u è armonica allora anche le derivate di u lo sono.

Dim.

1. Basta osservare che in base al Teo. 3.1 le funzioni armoniche hanno la proprietà della media, quindi in base al Teo. 3.4 sono C^∞ .
2. Basta osservare che in base al Teo. 3.4 tali funzioni sono certamente $C^2(\Omega)$ e quindi esse sono funzioni di classe $C^2(\Omega)$ con la proprietà della media. In base al Teo. 3.1 esse sono armoniche.
3. Basta osservare che le armoniche sono C^∞ , quindi le derivate parziali commutano e così $\Delta(\partial_j u)(\mathbf{x}) = \partial_j(\Delta u)(\mathbf{x}) = \partial_j(0) = 0$.

■

Le derivate di una funzione armonica possono essere stimate a partire dai valori della funzione stessa secondo un meccanismo che è simile a quanto accade per le funzioni olomorfe. Tali stime possono essere ottenute a partire da opportune formule di rappresentazione integrale, esattamente come accade per le olomorfe. Esiste però un procedura diretta e ricorsiva che fornisce gli stessi risultati senza l'uso di tali formule integrali. Ecco il teorema.

Teorema 3.5 *Sia u armonica in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora esistono due costanti positive a, b tali che per ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ e ogni r con $B_r(\mathbf{x}_0) \subseteq \Omega$ si ha*

$$|\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \leq a \cdot \left(\frac{b|\alpha|}{r}\right)^{|\alpha|} \cdot \frac{\|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)}}{r^n} \quad \forall \text{ multiindice } \alpha,$$

dove $|\alpha|^{|\alpha|}$ è posta a 1 per $|\alpha| = 0$.

Si osservi che le costanti a, b non dipendono da \mathbf{x}_0 né da r , né, ovviamente, da α . La dimostrazione del teorema fornisce anche una possibile scelta per i valori di tali costanti.

Dim. La dimostrazione è per induzione su $|\alpha|$. In assenza di derivate (quindi caso $|\alpha| = 0$) la proprietà del valor medio dà

$$|u(\mathbf{x}_0)| = \frac{1}{\mu_n r^n} \left| \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \frac{1}{\mu_n r^n} \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)}$$

il che forza a prendere $a \geq 1/\mu_n$. Consideriamo poi le derivate di ordine 1 le quali sono anch'esse funzioni armoniche (vd. Cor. 3.3). In particolare anche per le derivate vale la proprietà del valor medio, che utilizziamo con raggio $r/2$. Si ha così che

$$|(\partial_j u)(\mathbf{x}_0)| = \frac{2^n}{\mu_n r^n} \left| \int_{B_{r/2}(\mathbf{x}_0)} \partial_j u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right|,$$

e usando il teorema di Green si ha

$$|(\partial_j u)(\mathbf{x}_0)| = \frac{2^n}{\mu_n r^n} \left| \int_{\partial B_{r/2}(\mathbf{x}_0)} u(\mathbf{x}) \nu_j \, d\sigma \right|.$$

In questa relazione possiamo inserire la stima di $u(\mathbf{x})$ fornita al passo precedente e con raggio $r/2$, visto che per ogni $\mathbf{x} \in \partial B_{r/2}(\mathbf{x}_0)$ la bolla $B_{r/2}(\mathbf{x})$ è contenuta in $B_r(\mathbf{x}_0)$. Si ha così che per tali \mathbf{x} vale

$$|u(\mathbf{x})| \leq a \frac{2^n}{r^n} \|u\|_{1, B_{r/2}(\mathbf{x})} \leq a \frac{2^n}{r^n} \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |(\partial_j u)(\mathbf{x}_0)| &\leq \frac{2^n}{\mu_n r^n} \int_{\partial B_{r/2}(\mathbf{x}_0)} |u(\mathbf{x})| \, d\sigma \leq \frac{2^n}{\mu_n r^n} \int_{\partial B_{r/2}(\mathbf{x}_0)} a \frac{2^n}{r^n} \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)} \, d\sigma \\ &= a \frac{2^n}{\mu_n r^n} \frac{2^n}{r^n} \left[\int_{\partial B_{r/2}(\mathbf{x}_0)} d\sigma \right] \cdot \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)} = a \frac{\sigma_n 2^n 2}{\mu_n r^n r} \cdot \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)} \\ &= a \frac{n 2^{n+1}}{r} \frac{1}{r^n} \cdot \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)}. \end{aligned}$$

Perché la tesi sia soddisfatta dobbiamo perciò prendere $b \geq n 2^{n+1}$. Siano ora a e b fissati in modo da soddisfare quelle richieste (ad esempio prendendo $a = 1/\mu_n$ e $b = n 2^{n+1}$) e supponiamo che la stima sia soddisfatta per ogni multiindice α con $|\alpha| \leq k$. Consideriamo una derivata con multiindice di ordine $k+1$, ovvero $\partial_j \partial^\alpha u$.

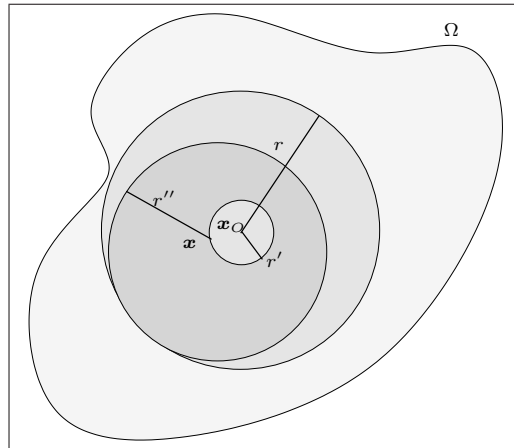


FIGURA 3.2: $r' = r/(|\alpha| + 1)$, $r'' = |\alpha|r/(|\alpha| + 1)$ così che $r' + r'' = r$.

Applichiamo la costruzione precedente alla funzione $\partial^\alpha u$ sulla bolla $B_{r/(|\alpha|+1)}(\mathbf{x}_0)$ (vd. Fig. 3.2). In questo modo abbiamo, prima dalla proprietà del valor medio

poi dal teorema di Green, che:

$$\begin{aligned}
|\partial_j(\partial^\alpha u)(\mathbf{x}_0)| &= \frac{(|\alpha|+1)^n}{\mu_n r^n} \left| \int_{B_{r/(|\alpha|+1)}(\mathbf{x}_0)} \partial_j(\partial^\alpha u)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \\
&= \frac{1}{\mu_n} \left(\frac{|\alpha|+1}{r} \right)^n \left| \int_{\partial B_{r/(|\alpha|+1)}(\mathbf{x}_0)} \partial^\alpha u(\mathbf{x}) \nu_j \, d\sigma \right| \\
&\leq \frac{\sigma_n}{\mu_n} \left(\frac{|\alpha|+1}{r} \right)^n \left(\frac{r}{|\alpha|+1} \right)^{n-1} \|\partial^\alpha u\|_{\infty, \partial B_{r/(|\alpha|+1)}(\mathbf{x}_0)} \\
&= n \frac{|\alpha|+1}{r} \|\partial^\alpha u\|_{\infty, \partial B_{r/(|\alpha|+1)}(\mathbf{x}_0)}.
\end{aligned}$$

In questa relazione possiamo inserire la stima di $\partial^\alpha u(\mathbf{x})$ fornita dal passo induttivo con raggio $|\alpha|r/(|\alpha|+1)$. Ciò perché per ogni $\mathbf{x} \in \partial B_{r/(|\alpha|+1)}(\mathbf{x}_0)$ la bolla $B_{|\alpha|r/(|\alpha|+1)}(\mathbf{x})$ è contenuta in $B_r(\mathbf{x}_0)$ (vd. Fig. 3.1). Si ha così che per tali \mathbf{x} vale

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha u(\mathbf{x})| &\leq a \left(\frac{b(|\alpha|+1)}{r} \right)^{|\alpha|} \left(\frac{|\alpha|+1}{|\alpha|r} \right)^n \|u\|_{1, B_{|\alpha|r/(|\alpha|+1)}(\mathbf{x})} \\
&\leq a \left(\frac{b(|\alpha|+1)}{r} \right)^{|\alpha|} \left(\frac{|\alpha|+1}{|\alpha|r} \right)^n \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
|(\partial_j(\partial^\alpha u)(\mathbf{x}_0))| &\leq n \frac{|\alpha|+1}{r} a \left(\frac{b(|\alpha|+1)}{r} \right)^{|\alpha|} \left(\frac{|\alpha|+1}{|\alpha|r} \right)^n \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)} \\
&= an \left(\frac{|\alpha|+1}{|\alpha|} \right)^n b^{|\alpha|} \left(\frac{|\alpha|+1}{r} \right)^{|\alpha|+1} \frac{1}{r^n} \|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)}
\end{aligned}$$

perché la tesi sia dimostrata basta che b soddisfi anche la stima $b \geq n \left(\frac{|\alpha|+1}{|\alpha|} \right)^n$ ma questa è certamente soddisfatta visto che b soddisfa già la più forte stima $b \geq n2^{n+1}$. \blacksquare

Teorema 3.6 (Liouville) *Sia u armonica in \mathbb{R}^n . Se $|u(\mathbf{x})| \ll (1+|\mathbf{x}|)^k$ per qualche k allora u è un polinomio di grado al più k .*

Dim. Dal Teorema 3.5 segue che

$$|\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \ll \left(\frac{b|\alpha|}{r} \right)^{|\alpha|} \cdot \frac{\|u\|_{1, B_r(\mathbf{x}_0)}}{r^n} \ll \left(\frac{b|\alpha|}{r} \right)^{|\alpha|} \cdot \|u\|_{\infty, B_r(\mathbf{x}_0)}$$

per cui l'ipotesi del teorema implica che per ogni $r > |\mathbf{x}_0|$ si ha

$$|\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0)| \ll \left(\frac{b|\alpha|}{r} \right)^{|\alpha|} (1+r)^k.$$

Prendendo il limite per $r \rightarrow \infty$ tale relazione mostra che tutte le derivate di ordine $|\alpha| = k + 1$ sono identicamente nulle. È noto che ciò implica la tesi. ■

Teorema 3.7 (regolarità analitica) *Sia u armonica in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora u è analitica in Ω . Ciò significa che per ogni $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ fissato, esiste un raggio $r > 0$ tale che u in $B_r(\mathbf{x}_0)$ è somma della sua serie di Taylor centrata in \mathbf{x}_0 .*

Dim. Sappiamo che u è di classe \mathcal{C}^∞ quindi la serie di Taylor per u in \mathbf{x}_0 esiste ed è

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^{\alpha} u(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\alpha}.$$

La stima fornita dal Teorema 3.5 consente di dimostrare che tale serie converge, tuttavia ciò di per sé non permette di affermare che essa converga proprio ad u . Per dimostrare la tesi dobbiamo quindi procedere in modo diverso. Sia $f(t) := u(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$, con \mathbf{x} sufficientemente vicino a \mathbf{x}_0 perché f sia definita in $[-1, 1]$. Osserviamo che f è \mathcal{C}^∞ in $[-1, 1]$ (ovvero, è \mathcal{C}^∞ in un aperto contenente tale insieme) e che le sue derivate sono date in termini delle derivate di u da:

$$\frac{d^k f}{dt^k}(t) = \sum_{\alpha: |\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^{\alpha} u(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\alpha} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

come si può verificare per induzione su k . In base al teorema di Taylor per f si ha che per ogni $N \in \mathbb{N}$ vale

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dt^k}(0) \right| \leq \frac{1}{N!} \left| \frac{d^N f}{dt^N}(t) \right|$$

dove t_0 è una opportuna costante in $(0, 1)$, dipendente però da \mathbf{x} . Sostituendo le derivate di f con la loro espressione in termini delle derivate di u si ha che

$$\begin{aligned} \left| u(\mathbf{x}) - \sum_{\alpha: |\alpha| < N} \frac{\partial^{\alpha} u(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\alpha} \right| &\leq \frac{1}{N!} \left| \sum_{\alpha: |\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \partial^{\alpha} u(\mathbf{x}_0 + t_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\alpha} \right| \\ &= \left| \sum_{\alpha: |\alpha|=N} \frac{\partial^{\alpha} u(\mathbf{x}_0 + t_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\alpha} \right|. \end{aligned}$$

Sia ora $\delta > 0$ sufficientemente piccolo perché $B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0) \subseteq \Omega$ dove η è un parametro positivo maggiore di $nb + 1$ dove b è la costante che appare nel Teo. 3.5 (il perché di tale scelta sarà chiarito in seguito). Sia \mathbf{x} preso in $B_{\delta}(\mathbf{x}_0)$. Per ogni \mathbf{x} del tipo considerato precedentemente si ha che $B_{(\eta-1)\delta}(\mathbf{x}) \subseteq B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0)$. Applicando la stima sulle derivate parziali data dal Teorema 3.5 si deduce che

$$|\partial^{\alpha} u(\mathbf{x}_0 + t_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))| \leq a \cdot \left(\frac{b|\alpha|}{(\eta-1)\delta} \right)^{|\alpha|} \cdot \|u\|_{\infty, B_{(\eta-1)\delta}(\mathbf{x}_0 + t_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}$$

+

+

per cui dall'inclusione $B_{(\eta-1)\delta}(\mathbf{x}_0 + t_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \subseteq B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0)$ segue

$$|\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0 + t_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))| \leq a \cdot \left(\frac{b|\alpha|}{(\eta-1)\delta} \right)^{|\alpha|} \cdot \|u\|_{\infty, B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0)}.$$

Inserendo questa stima nella relazione precedente si ha

$$\begin{aligned} \left| u(\mathbf{x}) - \sum_{\alpha: |\alpha| < N} \frac{\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha \right| &\leq \sum_{\alpha: |\alpha| = N} \frac{|\partial^\alpha u(\mathbf{x}_0 + t_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))|}{\alpha!} |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha| \\ &\leq a \cdot \left(\frac{bN}{(\eta-1)\delta} \right)^N \|u\|_{\infty, B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0)} \sum_{\alpha: |\alpha| = N} \frac{1}{\alpha!} |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha|. \end{aligned}$$

Scegliendo le \mathbf{x} in $B_\delta(\mathbf{x}_0)$ possiamo stimare $|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha|$ osservando che $|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha| = \prod_j |x_j - x_{0,j}|^{\alpha_j} \leq \prod_j \delta^{\alpha_j} \leq \delta^{|\alpha|}$, ottenendo

$$\leq a \cdot \left(\frac{bN}{(\eta-1)\delta} \right)^N \|u\|_{\infty, B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0)} \delta^N \sum_{\alpha: |\alpha| = N} \frac{1}{\alpha!}.$$

D'altra parte $\sum_{\alpha: |\alpha| = N} \frac{1}{\alpha!} = \frac{1}{N!} \sum_{\alpha: |\alpha| = N} \frac{N!}{\alpha!} = \frac{n^N}{N!}$, così

$$= a \cdot \left(\frac{bnN}{(\eta-1)\delta} \right)^N \delta^N \frac{1}{N!} \|u\|_{\infty, B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0)}$$

ovvero

$$= a \cdot \left(\frac{bn}{\eta-1} \right)^N \frac{N^N}{N!} \|u\|_{\infty, B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0)}.$$

D'altra parte $N! \geq (N/e)^N$ quindi abbiamo, infine,

$$\leq a \cdot \left(\frac{bne}{\eta-1} \right)^N \|u\|_{\infty, B_{\eta\delta}(\mathbf{x}_0)}.$$

L'aver scelto $\eta > 1 + bne$ garantisce che tale espressione tende a zero quando $N \rightarrow \infty$, dimostrando così la tesi. \blacksquare

Grazie al risultato precedente possiamo ora migliorare quanto affermato nel Teorema 3.2.

Corollario 3.4 *Sia u armonica in Ω aperto connesso di \mathbb{R}^n . Se u ha estremanti locali in Ω allora u è costante.*

+

+

Dim. Sia $\mathbf{p} \subseteq \Omega$ un punto in cui u ha un estremo locale. Cambiando u in $-u$, se necessario, possiamo supporre che u sia un massimo locale. Procedendo come già fatto nella dimostrazione del Teorema 3.2, dalla proprietà della media segue che esiste una bolla $B_r(\mathbf{p})$ in cui u è costante. Il teorema precedente mostra che u è analitica in Ω , ma allora u è costante in Ω . Infatti, sia \mathbf{q} un qualsiasi punto di Ω distinto da \mathbf{p} . La connessione di Ω garantisce l'esistenza di una curva regolare che congiunge \mathbf{q} a \mathbf{p} e contenuta in Ω (vd. Fig. 3.3).

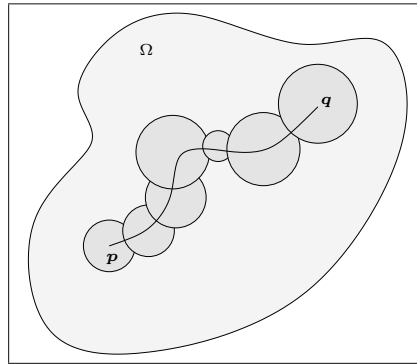


FIGURA 3.3.

In ogni punto di tale curva u è armonica e quindi a ciascun punto è associato una bolla in cui u è descritto da una serie di potenze. La compattezza della curva garantisce l'esistenza di una famiglia finita di tali bolle. u è costante nella bolla che contiene \mathbf{p} e dal prolungamento appena determinato segue che essa è costante lungo tutta la curva. In particolare $u(\mathbf{q}) = u(\mathbf{p})$. La tesi segue allora dalla arbitrarietà di \mathbf{q} . ■

3.2. Formula di Poisson

Veniamo ora a quello che probabilmente è il topic più importante ovvero alla determinazione di una formula integrale che sia in grado di fornire la soluzione al problema di Dirichlet

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n ed f e g sono funzioni continue. Osserviamo che il principio del massimo e la linearità dell'equazione considerata garantiscono l'unicità della soluzione; se infatti u_1 ed u_2 fossero entrambe soluzioni del problema,

la loro differenza dovrebbe soddisfare

$$\begin{cases} \Delta(u_1 - u_2) = 0 & \text{in } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

da cui segue appunto che $u_1 = u_2$ per il principio del massimo. Per costruire tale soluzione procediamo seguendo il metodo di Green, così come è esposto ad esempio in Evans².

Esiste un diverso comportamento, in alcuni dettagli, per quanto riguarda i casi $n = 2$ ed $n \geq 3$. Visto che abbiamo già trattato il caso $n = 2$ nel capitolo precedente, per ora ci concentriamo su $n \geq 3$. Diremo poi volta per volta quali cambiamenti debbano essere fatti per ritrovare i risultati per $n = 2$.

Anzitutto cerchiamo se vi siano funzioni armoniche radiali. Ciò significa che cerchiamo funzioni della forma $u(\mathbf{x}) = \varphi(r)$ con $r := |\mathbf{x}|$ che soddisfino l'equazione di Laplace. Supponiamo che φ sia di classe \mathcal{C}^2 in qualche dominio di \mathbb{R} , allora

$$\partial_j u = \partial_j \varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \partial_j r = \varphi'(r) \cdot \frac{x_j}{r}$$

ne segue così che

$$\partial_j^2 u = \partial_j \left(\varphi'(r) \cdot \frac{x_j}{r} \right) = \varphi''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \varphi'(r)$$

per cui

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u = \varphi''(r) + \left(\frac{n-1}{r} \right) \varphi'(r).$$

Le armoniche radiali saranno quindi le soluzioni di

$$\varphi''(r) + \left(\frac{n-1}{r} \right) \varphi'(r) = 0.$$

Per $n \geq 3$ le soluzioni di tale equazione sono le costanti e i multipli di r^{2-n} (se invece $n = 2$ oltre alle costanti vi sono i multipli di $\log r$). A seguito del particolare ruolo che la funzione

$$(3.4) \quad \Phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}}$$

svolge nella trattazione dell'equazione di Laplace, essa è detta *soluzione fondamentale*. La particolare scelta della costante è dovuta ad una normalizzazione che incontreremo in seguito. Si osservi che per come è stata costruita Φ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ ed è, appunto, radiale. Gli studenti di Fisica saranno certamente confortati nel vedere in tale funzione l'estensione al caso $n \geq 3$ del consueto potenziale gravitazionale $1/|\mathbf{x}|$ in \mathbb{R}^3 .

²L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

La linearità dell'operatore di Laplace mostra che la funzione $\sum_{j=1}^N a_j \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j\}$ per ogni scelta dei punti \mathbf{x}_j e dei numeri a_j . C'è quindi qualche speranza che un integrale di convoluzione, ovvero un integrale della forma

$$\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

possa fornire una qualche forma generale per le funzioni armoniche di Ω . Si osservi però che per $r \rightarrow 0$ si ha

$$\Phi(\mathbf{x}) \ll r^{2-n}, \quad \partial_j \Phi(\mathbf{x}) \ll r^{1-n}, \quad \partial_{jl}^2 \Phi(\mathbf{x}) \ll r^{-n},$$

e che tali stime non possono essere migliorate. Ne segue che mentre la singolarità che Φ e le sue derivate prime possiedono in \mathbf{o} sono di tipo integrabile, questo non accade per le derivate seconde. Questo mostra che certamente *non* è corretto commutare l'operatore laplaciano con il simbolo di integrale e pensare di ottenere così

$$\Delta \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0.$$

Il calcolo corretto è certamente più delicato e infatti condurrà ad una identità diversa.

La soluzione fondamentale, come abbiamo detto, avrà un ruolo notevole nello sviluppo di una formula che consenta di determinare la soluzione di (3.3). Per ora però consideriamo la seguente situazione.

Sia U un aperto *limitato* di \mathbb{R}^n il cui bordo sia unione finita di superfici regolari orientabili. Siano poi u, v due funzioni di classe $\mathcal{C}^2(\bar{U})$ (e quindi \mathcal{C}^2 in un aperto contenente \bar{U}). Sotto queste ipotesi vale la formula di Green

$$(3.5) \quad \int_U [u \Delta v - v \Delta u] d\mathbf{y} = \int_{\partial U} \left[u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right] d\sigma$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ rappresenta la normale esterna ad U e $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ rappresenta la derivata normale (vd. Sez. 1.7).

Consideriamo questa formula con $v(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, $U = U_{\varepsilon} := \Omega \setminus \overline{B_{\varepsilon}(\mathbf{x})}$, $\mathbf{x} \in \Omega$ ed ε sufficientemente piccolo perché $\overline{B_{\varepsilon}(\mathbf{x})}$ sia contenuto in Ω . Abbiamo così

$$(3.6) \quad \int_{U_{\varepsilon}} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\Delta u)(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial U_{\varepsilon}} \left[\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] d\sigma_{\mathbf{y}}$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\Delta \Phi = 0$ in U_{ε} . In questa espressione consideriamo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$.

■ Consideriamo il termine

$$\int_{U_{\varepsilon}} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\Delta u)(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Inglobiamo la dipendenza da ε del dominio nell'integranda tramite una funzione caratteristica:

$$\int_{\Omega} \chi_{U_{\varepsilon}}(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\Delta u)(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

L'integranda è in valore assoluto stimata da $\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) |(\Delta u)(\mathbf{y})|$ in modo indipendente da ε . In una bolla aperta e limitata contenente \mathbf{x} tale funzione risulta integrabile, poiché $|(\Delta u)(\mathbf{y})|$ è limitato e $\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ è integrabile (basta passare alle polari per rendersene conto: $\int_{B_r(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{y} = \int_{B_r} \Phi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \ll \int_{[0,1] \times S_1^{n-1}} r^{2-n} r^{n-1} \, dr \, d\sigma < +\infty$) quindi dal teorema di convergenza dominata segue che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_{\varepsilon}} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\Delta u)(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) (\Delta u)(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

■ Indaghiamo ora il comportamento di

$$\int_{\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Osserviamo che esso è, in valore assoluto, stimato da

$$\int_{\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{y}) \right| \, d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Visto che per ipotesi u è armonica in Ω (e quindi in $\overline{B_{\varepsilon}(\mathbf{x})}$) esiste certamente una costante M , indipendente da ε , tale che $|\frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{y})| = |\langle \nabla u, \nu \rangle| \leq M$, per cui l'integrale precedente è stimato da

$$\leq M \int_{\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = M \int_{\partial B_{\varepsilon}} \Phi(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Sulla sfera ∂B_{ε} la funzione $\Phi(\mathbf{y})$ è costante ed è $\ll \varepsilon^{2-n}$, quindi si ha

$$\ll M \varepsilon^{2-n} \int_{\partial B_{\varepsilon}} d\sigma \ll M \varepsilon^{2-n} \varepsilon^{n-1} = M \varepsilon$$

è dunque chiaro che tale termine tende a zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

■ Indaghiamo ora il comportamento di

$$\int_{\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}$$

in cui il versore normale ν , dovendo essere esterno ad U_{ε} , è interno a $\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{x})$. Trasliamo il dominio di integrazione in \mathbf{o} , ottenendo

$$\int_{\partial B_{\varepsilon}(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\partial B_{\varepsilon}} u(\mathbf{y} + \mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Osserviamo che sulla sfera ∂B_ε si ha $\frac{\partial}{\partial \nu} = -\sum_j \frac{x_j}{\varepsilon} \partial_j = -\frac{\partial}{\partial r}$ e quindi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \frac{1}{\sigma_n} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-1}}$$

di conseguenza si ha

$$\int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x})} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{y}} = \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} u(\mathbf{y} + \mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$ tale funzione tende a $u(\mathbf{x})$. Infatti,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} u(\mathbf{y} + \mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{y}} - u(\mathbf{x}) \right| \\ \leq \frac{1}{\sigma_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} |u(\mathbf{y} + \mathbf{x}) - u(\mathbf{x})| d\sigma_{\mathbf{y}} \leq \|u - u(\mathbf{x})\|_{\infty, B_\varepsilon(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

e la continuità di u in \mathbf{x} garantisce che tale quantità è arbitrariamente piccola pur di prendere ε sufficientemente piccolo.

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ nella (3.6) ed inserendo quanto dimostrato abbiamo così che

$$\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})(\Delta u)(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial \Omega} [\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y} - \mathbf{x})] d\sigma_{\mathbf{y}} - u(\mathbf{x})$$

ovvero che

$$(3.7) \quad u(\mathbf{x}) = \int_{\partial \Omega} [\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y} - \mathbf{x})] d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})(\Delta u)(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Tale fondamentale formula fornisce il valore di u in un generico punto \mathbf{x} quando siano noti il suo laplaciano in Ω e i valori di u e di $\partial_\nu u$ sul bordo di Ω . Il problema di Dirichlet (3.3) assegna i due primi dati, ma non dice nulla su $\partial_\nu u$. Abbiamo quindi bisogno di rielaborare la formula in modo da eliminare tale richiesta. Per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$ supponiamo di riuscire a determinare una soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \Delta \phi^{\mathbf{x}} = 0 & \text{in } \Omega, \text{ con } \phi^{\mathbf{x}} = \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \text{ e } \phi^{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}^2(\Omega) \\ \phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{su } \partial \Omega \end{cases}$$

allora, dalla formula di Green (3.5) applicata in Ω alla coppia di funzioni u e $\phi^{\mathbf{x}}$ si ha

$$(3.9) \quad - \int_{\Omega} \phi^{\mathbf{x}} \Delta u d\mathbf{y} = \int_{\partial \Omega} \left[u \frac{\partial \phi^{\mathbf{x}}}{\partial \nu} - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma.$$

Sommando (3.7) e (3.9) si ha

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \phi^{\mathbf{x}} \Delta u d\mathbf{y} - \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u d\mathbf{y} + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial \phi^{\mathbf{x}}}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\partial \Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\sigma.$$

+

+

Introducendo la funzione $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ la relazione assume così la forma

$$(3.10) \quad u(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\Delta u)(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\sigma.$$

In questa espressione $\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \langle \nabla_{\mathbf{y}} G|_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \rangle$ e $\boldsymbol{\nu}$ è la normale esterna ad Ω . L'interesse per tale formula sta nel fatto che in essa non compare più la derivata normale di u . In base a tale formula, quindi, la soluzione del problema di Dirichlet (3.3) è

$$(3.11) \quad u(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Ovviamente nulla viene gratis, per cui siamo sì riusciti ad eliminare la derivata normale di u , ma solo a scapito della introduzione della funzione di Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la cui esistenza non è garantita (in seguito vedremo che essa effettivamente esiste per ogni Ω che sia sufficientemente regolare) e che in genere non è nota esplicitamente. Su domini Ω particolari quali ad esempio un semispazio o l'interno di una bolla la funzione G può essere effettivamente determinata. Per tali domini la formula di Green risolve quindi interamente ed esplicitamente il problema (3.3).

3.3. Bolla unitaria

Sia Ω la bolla B_1 . Per applicare il metodo precedente dobbiamo risolvere il problema di Dirichlet (3.8), ovvero per ogni $\mathbf{x} \in B_1$ arbitrariamente scelto, dobbiamo determinare una funzione $\phi^{\mathbf{x}}$ armonica in B_1 che sul bordo di tale bolla coincida con la funzione $\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. La funzione $\Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{\tilde{\mathbf{x}}\}$ per ogni scelta di $\tilde{\mathbf{x}}$ in \mathbb{R}^n . Per produrre la funzione cercata, quindi, possiamo tentare di determinare $\tilde{\mathbf{x}}$ in modo che esso sia esterno a B_1 e tale che per $|\mathbf{y}| = 1$ si abbia $\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$. Vista la definizione di Φ , ciò equivale a richiedere che $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|$ quando $|\mathbf{y}| = 1$. Purtroppo si vede subito che un punto $\tilde{\mathbf{x}}$ siffatto non esiste. L'idea però è buona, basta osservare che l'equazione $\Delta \phi^{\mathbf{x}} = 0$ è omogenea, così che v'è un grado di libertà che ancora non abbiamo considerato: $\Phi(\alpha(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{\tilde{\mathbf{x}}\}$ qualunque sia la costante $\alpha > 0$. Cerchiamo quindi un $\tilde{\mathbf{x}}$ che sia esterno a B_1 e tale che $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \alpha |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|$ per ogni $|\mathbf{y}| = 1$ per una opportuna scelta di α . Sviluppando il prodotto scalare, la relazione $|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 = \alpha^2 |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^2$ diventa

$$1 - 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + |\mathbf{x}|^2 = \alpha^2 (1 - 2\langle \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + |\tilde{\mathbf{x}}|^2)$$

ovvero

$$2\langle \mathbf{y}, \alpha^2 \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \rangle = \alpha^2 (1 + |\tilde{\mathbf{x}}|^2) - (1 + |\mathbf{x}|^2).$$

+

+

Vista l'arbitrarietà di \mathbf{y} questa relazione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha^2 \tilde{\mathbf{x}} \\ \alpha^2(1 + |\tilde{\mathbf{x}}|^2) = 1 + |\mathbf{x}|^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbf{x} = \alpha^2 \tilde{\mathbf{x}} \\ (\alpha^2 - 1)(\alpha^2 |\tilde{\mathbf{x}}|^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Escluso il caso $\alpha = 1$, evidentemente non accettabile, si ha $\alpha = 1/|\tilde{\mathbf{x}}|$. In conclusione

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \alpha^2 \tilde{\mathbf{x}} \\ \alpha = 1/|\tilde{\mathbf{x}}| \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2 \\ \alpha = |\mathbf{x}|. \end{cases}$$

Abbiamo così trovato la soluzione $\phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$, dove $\tilde{\mathbf{x}} := \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2$. La funzione di Green della bolla unitaria è quindi

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})) \\ &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n-2}} - \frac{1}{|\mathbf{x}|(|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|)^{n-2}} \right]. \end{aligned}$$

Osserviamo che ogni derivata parziale $\partial_j := \partial_{y_j}$ è data da

$$\partial_j G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma_n} \left[\frac{x_j - y_j}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} + \frac{|\mathbf{x}|^2 y_j - x_j}{|\mathbf{x}|(|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|)^n} \right].$$

Di conseguenza, tenuto conto che su ∂B_1 si ha $|\mathbf{x}||\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ e che $\boldsymbol{\nu}$ è uguale a \mathbf{y} (ma con diverso punto di applicazione), si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= \langle \nabla G, \boldsymbol{\nu} \rangle = \sum_j y_j \partial_j G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma_n} \sum_j y_j \left[\frac{x_j - y_j}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} + \frac{|\mathbf{x}|^2 y_j - x_j}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_n |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} \left[\sum_j y_j (x_j - y_j + |\mathbf{x}|^2 y_j - x_j) \right] = \frac{|\mathbf{x}|^2 - 1}{\sigma_n |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} \quad \text{su } \partial B_1. \end{aligned}$$

Possiamo dunque esplicitare la relazione (3.11).

Teorema 3.8 *Data g continua in ∂B_1 , il problema di Dirichlet*

$$(3.12) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \\ u = g & \text{su } \partial B_1 \end{cases}$$

con $u \in \mathcal{C}(\overline{B_1}) \cap \mathcal{C}^2(B_1)$ ha una ed una sola soluzione. In B_1 essa è data dalla formula

$$(3.13) \quad u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{\sigma_n} \int_{\partial B_1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} d\sigma.$$

Tale formula è nota con il nome di *formula di Poisson*. Se poi il problema è invece formulato in una bolla di raggio $r > 0$ la formula precedente può essere facilmente generalizzata osservando che se $u(\mathbf{x})$ è armonica in B_r allora $\tilde{u}(\mathbf{x}) :=$

$u(r\mathbf{x})$ è armonica in B_1 . Si ottiene così, dopo qualche conto, che la soluzione del problema di Dirichlet

$$(3.14) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_r \\ u = g & \text{su } \partial B_r \end{cases}$$

è data dalla formula

$$(3.15) \quad u(\mathbf{x}) = \frac{r^2 - |\mathbf{x}|^2}{\sigma_n r} \int_{\partial B_r} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} d\sigma.$$

La funzione

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{r^2 - |\mathbf{x}|^2}{\sigma_n r} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} \quad \text{con } \mathbf{x} \in B_r, \mathbf{y} \in \partial B_r$$

è detta *nucleo di Poisson* per la bolla B_r . Tramite tale funzione la formula che dà la soluzione al problema di Dirichlet (3.14) appare come un integrale *sul bordo* ∂B_r del nucleo K con il dato al bordo g :

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B_r} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\sigma.$$

Oss. 3.2 Come abbiamo fatto per \mathbb{R}^2 , possiamo usare la formula di rappresentazione integrale di Poisson per ri-dimostrare che:

- u è $C^\infty(B_r)$. Infatti K lo è ed è lecito derivare sotto il segno di integrale;
- se u è armonica in \mathbb{R}^n ed è limitata, allora è costante (derivare la rappresentazione integrale precedente per ricavare una formula integrale per $\partial_j u$. Usarla poi per stimare il valore di $\partial_j u$ in punti di B_1 tramite un integrale su ∂B_r con $r > 1$. Stimare poi l'integrale per verificare che tale relazione implica che $\partial_j u \ll 1/r$. Prendendo il limite per $r \rightarrow \infty$ si dimostra che la derivata $\partial_j u$ in punti di norma ≤ 1 è nulla e quindi la tesi segue facilmente).
- la stima sulle derivate $\partial^\alpha u$ data dal Teo. 3.5 può essere ottenuta a partire dalla relazione $\partial^\alpha u(\mathbf{x}) = \int_{B_r} \partial^\alpha K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ una volta fissato r in modo che $\overline{B_r} \subseteq \Omega$.

□

Oss. 3.3 La mappa $\tilde{\cdot}: \mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2$ che abbiamo utilizzato per trovare la funzione di Green della bolla unitaria è uno strumento importante della geometria ed è nota con il nome di *inversione circolare*. Essa è una involuzione di $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$ (nel senso che $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{x}$) che fissa i punti di ∂B_1 e manda in modo biunivoco i punti di $B_1 \setminus \{\mathbf{o}\}$ in punti di $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1}$. Essa può essere estesa alla compattificazione $\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ di Aleksandrov ponendo $\tilde{\infty} = \mathbf{o}$ e $\tilde{\mathbf{o}} = \infty$ e la sua estensione così ottenuta risulta essere un diffeomorfismo tra varietà compatte. □

Oss. 3.4 Come già detto per il caso bidimensionale, il Teo. 3.8 mostra che anche nel generico caso n -dimensionale è possibile definire una mappa che associa ad $h \in \mathcal{C}(\partial B_1)$ la soluzione di quel problema di Dirichlet. Tale soluzione infatti è unica (per il Teo. 3.3) ed esiste, appunto per il Teo. 3.8. Abbiamo così un operatore S definito dallo spazio di Banach $(\mathcal{C}(\partial B_1), \|\cdot\|_{\infty, \partial B_1})$ allo spazio di Banach $(\mathcal{C}(\overline{B_1}), \|\cdot\|_{\infty, \overline{B_1}})$. Tale operatore è evidentemente lineare e il Teo. 3.3 mostra che esso conserva la norma. In particolare è continuo. Abbiamo quindi dimostrato che il problema di Dirichlet analizzato nel Teo. 3.8 non solo ammette una ed una sola soluzione, ma essa dipende in modo continuo dal dato di bordo g . Si tratta di una proprietà particolarmente importante: essa ad esempio è essenziale per ogni studio di tipo “numerico” del problema in esame poiché direttamente connessa al problema della “stabilità” della soluzione in funzione del dato al bordo. \square

3.4. Semispazio

Sia $\Pi_n^+ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ il semispazio di \mathbb{R}^n costituito dai punti con coordinata cartesiana x_n positiva. Vogliamo ora mostrare come si possa applicare il metodo di Green per la risoluzione del problema di Dirichlet (3.3) a tale dominio. Anzitutto dobbiamo risolvere il problema di Dirichlet (3.8). Ciò significa che per ogni $\mathbf{x} \in \Pi_n^+$ arbitrariamente scelto dobbiamo determinare una funzione $\phi^{\mathbf{x}}$ armonica in Π_n^+ che sul bordo di tale aperto coincida con la funzione $\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. Si osservi che questo però non basterà per poter applicare la formula risolutiva (3.11): la deduzione di quella formula, infatti, assumeva che il dominio fosse limitato, ipotesi che ora è evidentemente falsa. A posteriori dovremo perciò dimostrare la correttezza della formula con un argomento ad hoc.

Per ogni scelta di $\tilde{\mathbf{x}}$, la funzione $\Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{\tilde{\mathbf{x}}\}$. Per produrre la funzione cercata, quindi, possiamo tentare di determinare $\tilde{\mathbf{x}}$ in modo che esso sia esterno a Π_n^+ e tale che per ogni $\mathbf{y} \in \Pi_n^+$ si abbia $\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$. Vista la definizione di Φ , ciò equivale a richiedere che $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|$ quando $y_n = 0$. In effetti una tale punto esiste: basta prendere

$$\tilde{\mathbf{x}} := (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

dove (x_1, \dots, x_n) siano le coordinate di \mathbf{x} . In pratica $\tilde{\mathbf{x}}$ è il punto simmetrico a \mathbf{x} rispetto all'iperpiano $\partial\Pi_n^+$.

Oss. 3.5 In elettrostatica, questo modo di determinare la funzione di Green va sotto il nome di *metodo della carica immagine*. \square

Abbiamo così trovato la soluzione $\phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$. La funzione di Green per il semipiano è quindi

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{1}{(n-2)\sigma_n} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{n-2}} - \frac{1}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^{n-2}} \right]. \end{aligned}$$

Possiamo quindi procedere come nel caso della bolla, osservando che ogni derivata parziale $\partial_j := \partial_{y_j}$ è data da

$$\partial_j G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma_n} \left[\frac{x_j - y_j}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} - \frac{\tilde{x}_j - y_j}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|^n} \right].$$

Di conseguenza, tenuto conto che su $\partial\Pi_n^+$ si ha $|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ e che $\boldsymbol{\nu}$ è diretto come $-\mathbf{e}_n$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= \langle \nabla G, \boldsymbol{\nu} \rangle = -\partial_n G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\sigma_n} \left[\frac{x_n - y_n}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} - \frac{\tilde{x}_n - y_n}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} \right] \\ &= \frac{-2x_n}{\sigma_n |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} \quad \text{su } \partial\Pi_n^+. \end{aligned}$$

Possiamo dunque esplicitare la relazione (3.10) che per la soluzione del problema di Dirichlet

$$(3.16) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Pi_n^+ \\ u = g & \text{su } \partial\Pi_n^+ \end{cases}$$

propone (ma non dimostra!) la formula

$$(3.17) \quad u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{\sigma_n} \int_{\partial\Pi_n^+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n} d\sigma.$$

Anche tale formula è nota con il nome di *formula di Poisson* (per il semispazio). Il teorema seguente afferma che effettivamente essa dà una soluzione a (3.16) sotto le opportune ipotesi di regolarità su g .

Teorema 3.9 *Sia g continua in $\partial\Pi_n^+$ e limitata. Sia u definita da (3.17). Allora*

- u è in $C^\infty(\Pi_n^+)$ e limitata,
- $\Delta u = 0$ in Π_n^+ ,
- per ogni $\mathbf{x}_0 \in \partial\Pi_n^+$, il limite $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0^+$ (limite fatto con \mathbf{x} in Π_n^+) di $u(\mathbf{x})$ esiste e vale $g(\mathbf{x}_0)$.

Dim. Dimostrazione “standard”³. ■

³L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, Cap. 2, Teo. 14.

La funzione

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{\sigma_n |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^n}$$

è detta *nucleo di Poisson* per il semispazio.

3.5. Unicità della soluzione con il metodo dell'integrale di energia

Consideriamo ancora una volta il problema di Dirichlet

$$(3.18) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n ed f e g sono funzioni continue. In precedenza abbiamo dimostrato l'unicità della soluzione $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ tramite il principio del massimo. Vogliamo ora mostrare un elegante argomento alternativo che consente di ottenere la medesima conclusione. Siano per ipotesi u_1, u_2 due soluzioni e sia $u := u_1 - u_2$. La linearità del problema mostra che u risolve

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dalla formula di Green di integrazione per parti segue l'identità (vd. (1.4))

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u \Delta u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mathbf{x}.$$

La funzione u è per ipotesi nulla sul bordo di Ω ed armonica in Ω . Otteniamo quindi che $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} = 0$. L'integranda è continua e definita positiva, quindi da tale stima segue che $\nabla u = 0$ in Ω , ovvero che u è costante in ogni componente connessa di Ω . Questo a sua volta implica che $u = 0$ in Ω , visto che u è nulla in $\partial\Omega$.

L'argomento che abbiamo appena usato è ricco di notevoli estensioni; dobbiamo però far notare che l'introduzione del principio del massimo è stata comunque utile; tramite esso, infatti, non solo abbiamo dimostrato l'unicità della soluzione, ma abbiamo anche dimostrato la dipendenza continua della soluzione del problema con $f = 0$ dal dato g (vd. Oss. 3.4).

3.6. Soluzione mediante un principio variazionale

Il problema di Dirichlet (3.18) ammette una formulazione variazionale. Sia infatti

$$\mathcal{A} := \{w \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) : w = g \text{ in } \partial\Omega\}$$

e sia $I: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale *energia*

$$I[w] := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 + fw \right) \, d\mathbf{x}.$$

Si ha allora che:

Teorema 3.10 (Principio di Dirichlet) *Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una soluzione di (3.18), allora*

$$(3.19) \quad I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

Viceversa, se $u \in \mathcal{A}$ soddisfa la (3.19), allora essa soddisfa il problema di Dirichlet (3.18).

Dim. (3.18) \Rightarrow (3.19). Sia u una soluzione di (3.18) e sia w una qualsiasi funzione di \mathcal{A} . Allora

$$0 = \int_{\Omega} (-\Delta u + f)(u - w) \, d\mathbf{x}.$$

Integrando per parti si ha (vd. la relazione (1.4))

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + f)(u - w) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla(u - w) \rangle + f \cdot (u - w)) \, d\mathbf{x},$$

dove i termini di bordo non appaiono poiché su $\partial\Omega$ si ha $u = g = w$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + fu) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla w \rangle + fw) \, d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 + fw \right) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

dove per l'ultima disuguaglianza si è osservato che $2\langle \nabla u, \nabla w \rangle \leq |\nabla u|^2 + |\nabla w|^2$. La relazione precedente mostra che

$$I[u] \leq I[w] \quad \forall w \in \mathcal{A}$$

che è appunto la (3.19).

(3.18) \Leftarrow (3.19). Sia v una qualsiasi funzione di classe C^∞ in Ω ed a supporto compatto. Sia $i(t) := I[u + tv]$, dove $t \in \mathbb{R}$ e sia u una funzione che soddisfa la (3.19) (in particolare $u \in \mathcal{A}$, ovvero $u = g$ su $\partial\Omega$). La funzione $i(t)$ presenta quindi un minimo per $t = 0$ (si osservi che $u + tv \in \mathcal{A}$ per ogni valore di t). D'altra parte

$$i(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla(u + tv)|^2 + f \cdot (u + tv) \right) \, d\mathbf{x} = At^2 + Bt + C$$

con

$$A := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x}, \quad B := \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + fv) \, d\mathbf{x}, \quad C := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu \right) \, d\mathbf{x}.$$

Per la minimalità di $i(0)$, quindi, deve essere $B = (2At + B)|_{t=0} = i'(0) = 0$, ovvero

$$0 = \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + fv) \, d\mathbf{x}.$$

Integrando per parti (vd. la relazione (1.4)) si ha allora

$$0 = \int_{\Omega} (-\Delta u + f)v \, d\mathbf{x}$$

per ogni funzione v a supporto compatto (nella relazione manca il termine di bordo, poiché v , a supporto compatto in Ω , è nulla in $\partial\Omega$). Dalla arbitrarietà di v segue allora che $\Delta u = f$ in Ω . Visto che $u = g$ su $\partial\Omega$, possiamo concludere che u soddisfa la (3.18). ■

3.7. Possibili argomenti di approfondimento:

1. **Laplaciano sotto cambiamento di coordinate.** Mostrare come il laplaciano si trasformi a seguito di un generico diffeomorfismo.
2. **Funzioni di Bessel.** Lo studio delle autofunzioni radiali del laplaciano in \mathbb{R}^2 porta naturalmente allo studio delle funzioni di Bessel.
3. **Armoniche sferiche in \mathbb{R}^3 .** Il passaggio alle variabili polari e la separazione della variabile radiale da quelle angolari determina un interessante problema differenziale per la parte angolare le cui soluzioni sono note con il nome di *armoniche sferiche*.
4. **Funzioni di Bessel sferiche in \mathbb{R}^3 .** Il passaggio alle variabili polari e la separazione della variabile radiale da quelle angolari determina un interessante problema differenziale per la parte radiale le cui soluzioni sono note con il nome di *funzioni di Bessel sferiche*. Esse sono legate da semplici relazioni alle funzioni di Bessel.
5. **Laplaciano su reticoli.** Sia Λ un qualsiasi reticolo in \mathbb{R}^n (ovvero un qualsiasi \mathbb{Z} -modulo in \mathbb{R}^n di rango n). La varietà Riemanniana $V_{\Lambda} := \mathbb{R}^n/\Lambda$ è topologicamente isomorfa ad un toro n -dimensionale ma l'isomorfismo *non* è necessariamente isometrico. Il laplaciano in V_{Λ} può essere interpretato come il consueto laplaciano di \mathbb{R}^n che però agisce sulle funzioni che siano Λ -periodiche. Gli autovalori del laplaciano in V_{Λ} coincidono quindi (molteplicità inclusa) con gli autovalori del laplaciano in \mathbb{R}^n sullo spazio delle funzioni Λ -periodiche. Si dimostra che gli autovalori in realtà coincidono (molteplicità inclusa) con le norme dei punti di Λ .
6. **Il problema di Kac: si può sentire la forma di un tamburo?** formulato negli anni '60 da M. Kac, esso solleva la seguente questione: gli autovalori del laplaciano dipendono da Ω al punto da distinguere con il solo spettro di Δ un dominio Ω da un altro? Negli anni '60 Milnor ha dimostrato che la risposta è negativa, osservando che in dimensione 16 esistono due reticoli Λ_1 e Λ_2 che danno luogo a varietà riemanniane V_{Λ_1} e V_{Λ_2} *non* isometriche per i quali però per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\#\{\mathbf{v} \in \Lambda_1: |\mathbf{v}| = \lambda\} = \#\{\mathbf{v} \in \Lambda_2: |\mathbf{v}| = \lambda\}$. In virtù di quanto osservato al punto precedente ciò significa che il laplaciano ha in V_{Λ_1}

e in V_{Λ_2} spettro identico⁴.

Negli anni '90 Gordon, Webb and Wolpert hanno trovato che anche in dimensione 2 il problema ha risposta negativa, costruendo esplicitamente due domini diversi su cui Δ ha però spettro identico. Il problema ha invece risposta positiva se si considerano domini Ω che siano convessi e con bordo regolare: ciò è stato recentemente dimostrato da S. Zelditch⁵.

7. **Formule asintotiche di Weyl sulla densità degli autovalori.** Per bordi di Ω sufficientemente regolari si ha che la funzione $\pi(x)$ che conta il numero di autovalori del laplaciano minori di x si comporta come $(2\pi)^{-n} \text{Area}(\Omega)x^{n/2} + c \cdot \text{Perimetro}(\Omega)x^{(n-1)/2} + o(x^{(n-1)/2})$, dove c è una costante indipendente da Ω .
8. **Funzioni armoniche e superfici minime.** Le superfici di \mathbb{R}^3 che siano estremali per l'area, a bordo assegnato, sono dette *superfici minime*. Esse possono essere caratterizzate dalla richiesta di essere superfici a curvatura media nulla. Per superfici che siano grafici di una funzione f , la curvatura media è data dal laplaciano di f , così che la superficie sarà minima se e solo se $\Delta f = 0$. Localmente ogni superficie minima può essere descritta come grafico di una funzione armonica (una volta fatte le dovute ipotesi di regolarità sulla superficie).

⁴Maggiori informazioni su ciò possono essere ricavati, oltre che dall'articolo originario di Milnor: (*Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, in *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **51**, 542 (1964)), anche leggendo il cap.1, pag. 36 del libro di Bruinier, van der Geer, Harder e Zagier: *The 1-2-3 of Modular Forms*, Universitext 2008.

⁵Vd. S. Zelditch *Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plane domains*, in *Geom. funct. anal.* **10**, 628–677 (2000).

+

+

CAPITOLO 4

Equazione dei processi diffusivi

L'equazione che vogliamo studiare ora è la seguente:

$$\partial_t u = \Delta u$$

dove $u := u(t, \mathbf{x})$ è una funzione di classe C^1 nella variabile temporale e di classe C^2 nelle variabili spaziali, almeno in qualche aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Il laplaciano di u è inteso nelle sole variabili spaziali. Tale equazione è nota col nome di *equazione dei processi diffusivi*, o *equazione del trasporto* o, ancora, *equazione del calore*. Tale terminologia è coerente con la sua deduzione¹. Sia Ω un aperto, limitato, con bordo regolare, e si consideri il fluire in Ω di una certa quantità di materia. Sia $\rho(t, \mathbf{x})$ la densità di tale sostanza al tempo t nel punto \mathbf{x} . Supponiamo che in Ω non vi siano né pozzi né sorgenti, motivo per cui la quantità di materia presente in Ω può variare solo a seguito di una sua fuoriuscita (flusso) attraverso $\partial\Omega$. Sia \mathbf{F} il vettore di corrente di materia in Ω ; la discussione precedente mostra che

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \nu \rangle \, d\sigma$$

visto che $\int_{\Omega} \rho(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ ha il significato di quantità di materia presente in Ω , e dove ν è la normale esterna a Ω . Il teorema della divergenza fornisce l'uguaglianza

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{F}, \nu \rangle \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\mathbf{x}$$

(l'assenza di pozzi e sorgenti consente di ipotizzare che \mathbf{F} sia regolare in Ω). D'altra parte sotto le opportune ipotesi di regolarità è lecito portare la derivata temporale sotto il segno integrale, così che la relazione precedente diventa

$$\int_{\Omega} (\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{F}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

¹In realtà, il termine di *equazione del calore* è coerente con l'interpretazione in uso agli inizi del '800 del calore come fluido (il *calorico*). A seguito della interpretazione del calore come manifestazione macroscopica di uno stato energetico microscopico, è oggettivamente meno semplice, anche se possibile, spiegare perché l'equazione del trasporto riesca effettivamente a modellizzare con buona approssimazione il fenomeno della propagazione del calore.

+

+

Visto che questa condizione deve essere soddisfatta in ogni porzione Ω dello spazio, possiamo dedurre la relazione

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

che è nota con il nome di *equazione di continuità*. Nella maggior parte dei fenomeni si ha una proporzionalità tra \mathbf{F} e $-\nabla \rho$ (la corrente è diretta in senso opposto al gradiente di densità) tramite una funzione che nei mezzi omogenei e stazionari è indipendente dal punto (omogeneità) e dal tempo (stazionarietà). A meno di un cambiamento della scala dei tempo possiamo dunque supporre che $\mathbf{F} = -\nabla \rho$, così che l'equazione di continuità diventa, appunto

$$\partial_t \rho = \Delta \rho.$$

4.1. Problema di Cauchy sul segmento

Vogliamo ora determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u & \text{in } (0, T) \times [0, 2\pi] \\ u = g & \text{su } \{t = 0\} \times [0, 2\pi] \end{cases}$$

La funzione $u = u(t, x)$ è cercata tra le funzioni che siano $\mathcal{C}^1((0, T))$ per qualche $T > 0$ nella variabile temporale t e $\mathcal{C}^2((0, 2\pi))$ nella variabile spaziale x . Supponiamo che il dato iniziale g sia in $L^2([0, 2\pi])$. Per essa disponiamo quindi della rappresentazione in serie di Fourier

$$g(x) \rightsquigarrow \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right)$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(x) \, dx, & a_n &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} g(x) \cos(nx) \, dx, \\ b_n &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} g(x) \sin(nx) \, dx. \end{aligned}$$

Si ricorda che l'ipotesi $g \in L^2([0, 2\pi])$ garantisce solo che la rappresentazione è valida come uguaglianza tra funzioni di $L^2([0, 2\pi])$, non puntualmente. Osserviamo poi che le funzioni $e^{\lambda^2 t + \lambda x}$ e $e^{\lambda^2 t - \lambda x}$ soddisfano l'equazione per ogni valore di $\lambda \in \mathbb{C}$. In particolare, quindi, anche le funzioni

$$e^{-n^2 t} \cos(nx), \quad e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

soddisfano l'equazione (corrispondono alla scelta $\lambda = in$). Questa osservazione, accoppiata alla rappresentazione del dato iniziale g in serie di Fourier, suggerisce

+

+

di considerare la funzione

$$(4.1) \quad u(t, x) := \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right).$$

In effetti si dimostrano i seguenti fatti.

Teorema 4.1 *La funzione definita in (4.1)*

1. è di classe \mathcal{C}^∞ in $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ e le sue derivate possono essere calcolate derivando termine a termine,
2. soddisfa l'equazione della diffusione,
3. tende a g in norma L^2 per $t \rightarrow 0^+$.

Dim.

1. Per dimostrare la tesi basta osservare che l'appartenenza di g a $L^2([0, 2\pi])$ implica che $a_n, b_n \rightarrow 0$. Siano u_n le funzioni la cui serie definisce $u(t, x)$ secondo la relazione $u(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t, x)$. Ogni u_n è \mathcal{C}^∞ in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, con derivate parziali che possono essere limitate uniformemente in x da espressioni della forma $p(n)e^{-n^2 t}$, dove $p(n)$ è un polinomio. La serie delle derivate parziali converge quindi uniformemente in $(\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $\varepsilon > 0$, così che la tesi segue dal ben noto teorema di derivazione per serie di funzioni.
2. Che u soddisfi l'equazione della diffusione segue direttamente dal fatto che ogni u_n la soddisfa e dal fatto che è lecito derivare termine a termine.
3. Consideriamo ora la norma $L^2([0, 2\pi])$ di $u(t, \cdot) - g$. Si ha

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot) - g\|_{2, [0, 2\pi]}^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-n^2 t} - 1) \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right) \right\|_{2, [0, 2\pi]}^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-n^2 t})^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2) \end{aligned}$$

dove per l'ultima identità si è usata la relazione di Parseval. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$. Sia $N = N(\varepsilon)$ sufficientemente grande perché $\sum_{n=N}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$ sia $\leq \varepsilon$: tale N esiste sicuramente visto la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$ (sempre per Parseval). Sia poi $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sufficientemente piccolo perché $e^{-N^2 \delta} > 1 - \sqrt{\varepsilon}$. Allora $e^{-n^2 t} > 1 - \sqrt{\varepsilon}$ per ogni $t < \delta$ e per ogni $n \leq N$, quindi

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot) - g\|_{2, [0, 2\pi]}^2 &\leq \sum_{n=1}^N (1 - e^{-n^2 t})^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2) + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2) + \varepsilon \leq \varepsilon (1 + \|g\|_{2, [0, 2\pi]}^2) \end{aligned}$$

+

+

che quindi dimostra la tesi. ■

Vediamo ora cosa accade inserendo nella definizione (4.1) di $u(t, x)$ le espressioni esplicite delle costanti a_n e b_n . Abbiamo:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) dy + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \left(\frac{\int_0^{2\pi} g(y) \cos(ny) dy}{\pi} \cos(nx) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_0^{2\pi} g(y) \sin(ny) dy}{\pi} \sin(nx) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) dy + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(y) \cos(n(x-y)) dy. \end{aligned}$$

Scrivendo $\cos(n(y-x))$ come $\frac{1}{2}(e^{in(y-x)} + e^{-in(x-y)})$ abbiamo

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) dy + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} e^{-n^2 t} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) e^{in(x-y)} dy \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) e^{in(x-y)} dy. \end{aligned}$$

Per $t > 0$ la serie precedente converge uniformemente in $[0, 2\pi]$, quindi possiamo scambiare serie ed integrale, ottenendo

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + in(x-y)} dy.$$

La definizione di $u(t, x)$ appare così come integrale di convoluzione

$$(4.2) \quad u(t, x) = \int_0^{2\pi} K(t, x-y) g(y) dy$$

dove $K(t, x)$ è la funzione

$$K(t, x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + inx}.$$

Essa è chiamata *soluzione fondamentale per l'equazione della diffusione sul segmento*. Si dimostra facilmente che essa è ben definita in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ (in realtà risulta ben definita addirittura in $(0, +\infty) \times \mathbb{C}$) e su tale dominio è di classe \mathcal{C}^∞ .

Essa è una funzione speciale, ben studiata per le sue molte proprietà di trasformazione; essa fu introdotta da Jacobi e da questi chiamata *funzione teta*.² La serie che definisce K non può essere sommata³, tuttavia la presenza del fattore $e^{-n^2 t}$ consente il calcolo dei suoi valori con ottima approssimazione già troncando la serie ai suoi primi termini.

La soluzione $u(t, x)$ ha alcune interessanti proprietà.

- a. Se $g(x) \geq 0$ per ogni x , allora anche $u(t, x) \geq 0$ per ogni tempo t ed ogni punto x . Tale proprietà mostra che se è possibile interpretare la condizione iniziale g come densità, allora la medesima interpretazione è possibile per $u(t, \cdot)$ per ogni tempo successivo. La dimostrazione di questo fatto si basa sulla seguente identità⁴:

$$K(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + inx} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x-2\pi m)^2}{4t}}$$

la quale mette in evidenza che $K(t, x) > 0$ per ogni tempo $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dalla relazione (4.2) è allora chiaro che se $g(x) \geq 0$ per ogni x allora anche $u(t, x)$ è non-negativa per ogni $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

- b. Per ogni tempo $t > 0$ si ha

$$\int_0^{2\pi} u(t, x) dx = \int_0^{2\pi} g(x) dx.$$

²Lo studio della funzione teta di Jacobi è uno dei capitoli più interessanti della analisi complessa all'interfaccia con la teoria analitica dei numeri e le forme modulari. Una interessante e chiara esposizione delle proprietà di base di tale funzione è contenuta nel Capitolo 10 di: E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 2003.

³Nel senso che non è possibile esprimere tale funzione attraverso le usuali funzioni.

⁴L'identità può essere dimostrata a partire dalla formula di sommazione di Poisson:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)$$

dove $\hat{f}(m) := \int_{\mathbb{R}} f(n) e^{-2\pi inm} dn$ è la trasformata di Fourier di f ed f è una qualsiasi funzione a decadimento rapido (in realtà la formula vale per funzioni di tipo molto più generale). Osserviamo infatti che $K(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)$ dove $f(n) := \frac{1}{2\pi} e^{-n^2 t + inx}$ che è certamente a decadimento rapido. La sua trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned} \hat{f}(m) &= \int_{\mathbb{R}} f(n) e^{-2\pi inm} dn = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-n^2 t + in(x-2\pi m)} dn = \frac{e^{-\frac{(x-2\pi m)^2}{4t}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(n\sqrt{t} + i\frac{x-2\pi m}{2\sqrt{t}})^2} dn \\ &= \frac{e^{-\frac{(x-2\pi m)^2}{4t}}}{2\pi\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R} + i\frac{x-2\pi m}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \frac{e^{-\frac{(x-2\pi m)^2}{4t}}}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

dove per valutare l'ultimo integrale si è utilizzato il classico risultato di integrazione complessa secondo cui l'integrale di e^{-z^2} sulle rette orizzontali del piano complesso non dipende da quale retta si prenda. La formula di Poisson dà direttamente l'identità cercata.

Dim. Infatti, la serie che definisce u converge uniforme in $[0, 2\pi]$ per ogni $t > 0$, per cui

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u(t, x) dx &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \left(\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right) \right] dx \\ &= \sqrt{2\pi} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_n}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \frac{b_n}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right] dx \\ &= \sqrt{2\pi} a_0 = \int_0^{2\pi} g(x) dx. \end{aligned}$$

Interpretando $u(t, \cdot)$ come densità della sostanza diffondente, la relazione precedente mostra che la quantità di sostanza presente ad ogni tempo è costante, in accordo con la deduzione empirica dell'equazione secondo cui durante il processo di diffusione non v'è né creazione né distruzione di sostanza.

c. A crescere del tempo la $u(t, \cdot)$ tende ad una costante. Infatti dalla stima $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = 1/(e^t - 1)$ segue facilmente che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx.$$

Tale fatto corrisponde alla osservazione empirica secondo cui durante il processo di diffusione la sostanza diffondente tende a distribuirsi uniformemente. Tale processo viene spesso chiamato *termalizzazione*.

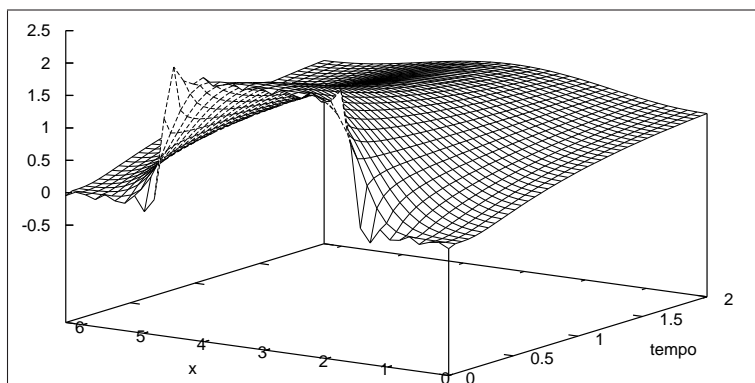


FIGURA 4.1. Soluzione del problema di Cauchy con $g(x) = 2\chi_{[\pi/2, 3\pi/2]}(x)$ il cui sviluppo di Fourier è $1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos((2n+1)x)$.

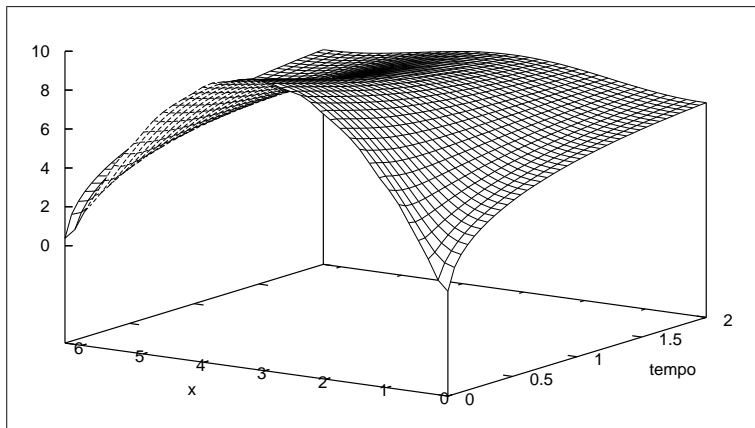


FIGURA 4.2. Soluzione del problema di Cauchy con $g(x) = x(2\pi - x)$ il cui sviluppo di Fourier è $\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$.

Prima di concludere osserviamo il seguente fatto curioso: se approssimiamo la serie che definisce $K(t, x)$ con il rispettivo integrale otteniamo:

$$\begin{aligned} K(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t + i n x} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-n^2 t + i n x} dn \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(n\sqrt{t} - \frac{i x}{2\sqrt{t}})^2 - \frac{x^2}{4t}} dn = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R} - \frac{i x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

Un classico esercizio di integrazione complessa mostra che l'integrale di e^{-z^2} sulle rette orizzontali del piano complesso non dipende da quale retta si prenda. Abbiamo quindi

$$K(t, x) \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

È interessante osservare che la funzione che abbiamo appena ottenuto come approssimazione di $K(t, x)$ apparirà nella prossima sezione quale strumento essenziale per la risoluzione del problema di Cauchy sulla retta.

4.2. Soluzione fondamentale

L'equazione della diffusione ha una interessante proprietà di invarianza di scala. Infatti è immediato osservare che se u è una qualsiasi funzione con $\partial_t u = \Delta u$, allora anche la funzione $u_\lambda(t, \mathbf{x}) := u(\lambda^2 t, \lambda \mathbf{x})$ soddisfa la medesima equazione,

comunque si prenda il parametro reale λ .⁵ Possiamo quindi tentare di vedere se esistano soluzioni per le quali si abbia $u = \lambda^{2\alpha} u_\lambda$ per qualche valore di $\alpha \in \mathbb{R}$, per ogni $\lambda > 0$. La relazione $u(t, \mathbf{x}) = \lambda^{2\alpha} u(\lambda^2 t, \lambda \mathbf{x})$ diventa, prendendo $\lambda = 1/\sqrt{t}$:

$$u(t, \mathbf{x}) = t^{-\alpha} u(1, \mathbf{x} t^{-1/2})$$

così che $u(t, \mathbf{x}) = t^{-\alpha} v(\mathbf{x} t^{-1/2})$, dove $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è \mathcal{C}^2 . L'equazione della diffusione che u deve soddisfare si trasforma così in una equazione per v :

$$\begin{aligned} \partial_t u = \Delta u &\implies \\ -\alpha t^{-\alpha-1} v(\mathbf{x} t^{-1/2}) - \frac{1}{2} t^{-\alpha-1} \langle \mathbf{x} t^{-1/2}, (\nabla v)(\mathbf{x} t^{-1/2}) \rangle &= t^{-\alpha-1} (\Delta v)(\mathbf{x} t^{-1/2}). \end{aligned}$$

Posto $\mathbf{y} := \mathbf{x} t^{-1/2}$, si ha

$$\alpha v(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, \nabla v(\mathbf{y}) \rangle + (\Delta v)(\mathbf{y}) = 0.$$

Cerchiamo una soluzione di tipo radiale, ovvero una funzione per la quale si abbia $v(\mathbf{y}) := \varphi(r)$, dove $r := |\mathbf{y}|$. L'equazione per φ diventa:

$$\begin{aligned} \alpha \varphi + \frac{r}{2} \varphi' + \varphi'' + \left(\frac{n-1}{r} \right) \varphi' &= 0 \\ r \varphi'' + (n-1) \varphi' + \frac{r^2}{2} \varphi' + \alpha r \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando per r^{n-2} questa diventa

$$\begin{aligned} r^{n-1} \varphi'' + (n-1) r^{n-2} \varphi' + \frac{r^n}{2} \varphi' + \alpha r^{n-1} \varphi &= 0 \\ (r^{n-1} \varphi')' + \frac{r^n}{2} \varphi' + \alpha r^{n-1} \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Se scegliamo $\alpha = n/2$, l'equazione diventa

$$(r^{n-1} \varphi')' + \left(\frac{r^n}{2} \varphi \right)' = 0 \implies r^{n-1} \varphi' + \frac{r^n}{2} \varphi = \text{const.}$$

Supponendo che φ e φ' tendano entrambe a zero per $r \rightarrow +\infty$ più rapidamente di r^{-n} (condizione da verificarsi a posteriori) si ha

$$r^{n-1} \varphi' + \frac{r^n}{2} \varphi = 0 \implies \varphi' = -\frac{r}{2} \varphi$$

⁵Osserviamo poi che $(u_{\lambda_1})_{\lambda_2}(t, \mathbf{x}) = u_{\lambda_1}(\lambda_2^2 t, \lambda_2 \mathbf{x}) = u((\lambda_1 \lambda_2)^2 t, \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{x}) = u_{\lambda_1 \lambda_2}(t, \mathbf{x})$ così che la mappa $\lambda \rightarrow u_\lambda$ si configura come azione del gruppo moltiplicativo \mathbb{R}^+ sullo spazio delle soluzioni dell'equazione. Riconoscere ciò è utile perché l'esistenza di questa azione può essere compresa nell'ambito delle azioni di gruppi di Lie e consente di utilizzare tecniche derivate dallo studio di tali gruppi per determinare particolari soluzioni delle equazioni differenziali. Sull'argomento si può consultare il libro di P. E. Hydon, *Symmetry methods for differential equations*, Cambridge University Press 2000.

la cui soluzione è $\varphi(r) = be^{-r^2/4}$, con b costante indeterminata. Abbiamo dunque trovato la soluzione $u(t, \mathbf{x}) = t^{-n/2}\varphi(|\mathbf{x}|/\sqrt{t}) = bt^{-n/2}e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}$. La funzione

$$(4.3) \quad \Phi(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}$$

è detta *soluzione fondamentale dell'equazione della diffusione*. La costante è stata scelta in modo che

$$(4.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 1 \quad \forall t > 0.$$

Dim. Infatti, dalla positività dell'integranda (e quindi usando Tonelli), si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \, dz = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \, dz \right]^n = 1. \end{aligned}$$

■

4.3. Problema di Cauchy in \mathbb{R}^n

Va sotto il nome di *Problema di Cauchy* il seguente sistema al valor iniziale:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = g & \text{su } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Quando g è continua e limitata esso ha per soluzione

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) &= (\Phi(t, \cdot) * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Infatti vale il seguente risultato.

Teorema 4.2 *Sia $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per qualche $p \in [0, +\infty]$. Allora la funzione u definita in (4.5) è di classe C^∞ in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, le sue derivate possono essere calcolate derivando sotto il segno di integrale e soddisfa l'equazione della diffusione. Se poi g è continua e limitata, allora $u(t, \cdot)$ ricostruisce il dato iniziale g tramite la relazione*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

La convergenza di $u(t, \mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ è poi uniforme in \mathbf{x} se g è uniformemente continua.

Dim. La regolarità \mathcal{C}^∞ di u deriva dal fatto che essa è la convoluzione del dato iniziale g con la funzione fondamentale Φ la quale è di classe \mathcal{C}^∞ in detto dominio, unito al fatto che $p(1/t, |\mathbf{x}|)\Phi(t, \mathbf{x})$ è limitata in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ qualunque sia il polinomio p (tale condizione sulla crescita della funzione agisce da sostituto dell'ipotesi di compattezza del dominio della funzione nella dimostrazione della Prop. 1.6).

Il fatto che u soddisfi l'equazione della diffusione deriva dal fatto che è possibile derivare sotto il segno di integrale, per cui

$$\partial_t u - \Delta u = (\partial_t \Phi - \Delta \Phi) * g = 0$$

visto che Φ stessa soddisfa l'equazione della diffusione.

Sia $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato. Dalla definizione di $u(t, \mathbf{x}_0)$ come $(\Phi * g)(\mathbf{x}_0)$ e dalla (4.4) segue che

$$\begin{aligned} |u(t, \mathbf{x}_0) - g(\mathbf{x}_0)| &= \left| \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4t}} (g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)) \, d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4t}} |g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ ad arbitrio. Per la continuità di g in \mathbf{x}_0 esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ se $|\mathbf{y}| < \delta$. Scriviamo quindi l'integrale precedente come

$$|u(t, \mathbf{x}_0) - g(\mathbf{x}_0)| \leq \int_{|\mathbf{y}| < \delta} \dots + \int_{|\mathbf{y}| \geq \delta} \dots =: I + J.$$

Stimiamo l'integrale I inserendo la stima $|g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$, così che

$$I \leq \varepsilon \int_{|\mathbf{y}| < \delta} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4t}} \, d\mathbf{y} \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4t}} \, d\mathbf{y} = \varepsilon,$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo usato la (4.4). Stimiamo l'integrale J inserendo la stima $|g(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq 2\|g\|_\infty$

$$J \leq 2\|g\|_\infty \int_{|\mathbf{y}| \geq \delta} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{4t}} \, d\mathbf{y} = 2\|g\|_\infty \int_{|z| \geq \delta/2t^{1/2}} \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|z|^2} \, dz$$

e questo integrale è $\leq \varepsilon$ pur di prendere t sufficientemente piccolo. Abbiamo così dimostrato che

$$|u(t, \mathbf{x}_0) - g(\mathbf{x}_0)| \leq I + J \leq (1 + 2\|g\|_\infty)\varepsilon,$$

ovvero la tesi. Se poi g è uniformemente continua, allora δ non dipende dal punto \mathbf{x}_0 e l'argomento precedente può essere ripetuto senza alcuna dipendenza da \mathbf{x}_0 . ■

Alcune interessanti osservazioni:

- Se $g(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni \mathbf{x} , allora $u(t, \mathbf{x}) \geq 0$ per ogni \mathbf{x} e per ogni $t > 0$. Ciò deriva dal fatto che la soluzione fondamentale Φ è a valori non negativi.

- b. Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ed è a valori non negativi, allora $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\|u(t, \cdot)\|_1 = \|g\|_1$ per ogni t . Infatti,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x}$$

per Fubini (o anche Tonelli, visto che l'integranda è per ipotesi a valori non negativi)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}$$

sostituendo nell'integrale interno la variabile $\mathbf{x} - \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ i due integrali si disaccoppiano, dando

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} \, d\mathbf{x} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

che per la (4.4) è uguale a $\|g\|_1$.

- c. Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni compatto K vale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_K u(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Infatti, per $t \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}{4t}} |g(\mathbf{y})| \leq |g(\mathbf{y})|$$

che è una maggiorante integrabile in $K \times \mathbb{R}^n$ indipendente da t . Dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ha quindi

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_K u(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{K \times \mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\ &= \int_{K \times \mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) \right] \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le proprietà precedenti hanno la seguente interessante interpretazione.

- Se g è interpretabile come densità, allora tale interpretazione si mantiene ad ogni tempo successivo.
- La quantità totale di fluido presente è costante nel tempo.
- La materia si diffonde nello spazio ed al passare del tempo tende ad essere distribuita uniformemente e visto che la diffusione avviene su un dominio illimitato, ogni porzione limitata di \mathbb{R}^n finisce (per $t \rightarrow +\infty$) col non contenere più alcuna porzione di sostanza.

4.4. Principio del massimo

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Per ogni $T > 0$ si definisce *cilindro parabolico* l'insieme $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$. Si definisce anche il *bordo parabolico di Ω_T* , ovvero l'insieme

$$\Gamma_T := \{t = 0\} \times \Omega \cup [0, T) \times \partial\Omega.$$

Si noti che Γ_T è composto dal 'fondo' $\{t = 0\} \times \Omega$ e dalla 'parete laterale' $[0, T) \times \partial\Omega$ di Ω_T ; invece il 'top' $\{t = T\} \times \Omega$ non appartiene a Γ_T . L'interesse per il bordo parabolico Γ_T deriva dal seguente risultato.

Teorema 4.3 *Sia Ω un aperto limitato. Sia $u: \overline{\Omega_T} \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $\overline{\Omega_T}$ e di classe \mathcal{C}^2 in Ω_T per la quale si abbia $\partial_t u - \Delta u \leq 0$. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega_T}} \{u(t, \mathbf{x})\} = \max_{\overline{\Gamma_T}} \{u(t, \mathbf{x})\}.$$

Dim. Supponiamo per il momento che u soddisfi la più restrittiva relazione $\partial_t u - \Delta u < 0$. La limitatezza di Ω garantisce l'esistenza di almeno un punto (t_0, \mathbf{x}_0) in $\overline{\Omega_T}$ in cui il valore $\max_{(t, \mathbf{x}) \in \overline{\Omega_T}} \{u(t, \mathbf{x})\}$ è assunto. Supponiamo per assurdo che tale valore sia in Ω_T . Allora $\partial_t u(t_0, \mathbf{x}_0) = 0$ e $\Delta u(t_0, \mathbf{x}_0) \leq 0$.⁶ Questo però contrasta con l'ipotesi secondo cui $\partial_t u - \Delta u < 0$ e quindi il punto (t_0, \mathbf{x}_0) deve appartenere al bordo di Ω_T . Supponiamo che esso appartenga a $\{t = T\} \times \overline{\Omega}$ e che quindi $t_0 = T$. Sia $u(T, \mathbf{x}_0) =: m$ il massimo in questione. La continuità di u in $\overline{\Omega_T}$ garantisce per ogni intero n l'esistenza di punti $(t_n, \mathbf{x}_n) \in \overline{\Omega_T}$ con $t_n < T$ tali che $u(t_n, \mathbf{x}_n) > m - 1/n$. Sia Ω_n il dominio $(0, t_n) \times \Omega$. Il punto (t_n, \mathbf{x}_n) appartiene al bordo di Ω_n ed in tal punto u assume un valore maggiore di $m - 1/n$. In $\overline{\Omega_n}$ il massimo di u è quindi maggiore di $m - 1/n$. Sia (t'_n, \mathbf{x}'_n) il punto in cui tale massimo è assunto. Il punto (t'_n, \mathbf{x}'_n) non è in Ω_n (per quanto visto prima) quindi esso appartiene al bordo di Ω_n . Esso non può essere assunto neanche in $\{t = t_n\} \times \Omega$ perché in tal caso nel punto di massimo si avrebbe $\partial_t u \geq 0$ (perché $t_n < T$, quindi la derivata $\partial_t u$ esiste nel punto di massimo) e $\Delta u \leq 0$, ma ciò contraddirebbe la disuguaglianza $\partial_t u - \Delta u < 0$. Il massimo (t'_n, \mathbf{x}'_n) in $\overline{\Omega_n}$ appartiene quindi a $\overline{\Gamma_T}$. Al variare di n la successione di punti (t'_n, \mathbf{x}'_n) ha necessariamente un punto di accumulazione in $\overline{\Gamma_T}$ (perché $\overline{\Gamma_T}$ è compatto). Sia $(t'_\infty, \mathbf{x}'_\infty)$ un tale punto di accumulazione. Dalla disuguaglianza $u(t'_n, \mathbf{x}'_n) > m - 1/n$ segue che $u(t'_\infty, \mathbf{x}'_\infty) \geq m$. Visto che m è il massimo di u in $\overline{\Omega_T}$ abbiamo in realtà $u(t'_\infty, \mathbf{x}'_\infty) = m$ e questo dimostra che

$$\max_{\overline{\Omega_T}} \{u(t, \mathbf{x})\} = \max_{\overline{\Gamma_T}} \{u(t, \mathbf{x})\}$$

per le funzioni per le quali $\partial_t u - \Delta u < 0$.

Supponiamo ora che invece u soddisfi in Ω_T la condizione $\partial_t u - \Delta u \leq 0$, meno

⁶Infatti, sia f una funzione di classe \mathcal{C}^2 in un intorno aperto di \mathbf{x}_0 . Allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{o}$ e la matrice hessiana di f in \mathbf{x}_0 non ha autovalori positivi. Ma allora la traccia della matrice hessiana in \mathbf{x}_0 è non positiva. Questo significa, appunto, che $\Delta f(\mathbf{x}_0) \leq 0$.

restrittiva. Sia $\eta > 0$ fissato ad arbitrio e sia $v(t, \mathbf{x}) := u(t, \mathbf{x}) - \eta t$. Osserviamo che $(\partial_t - \Delta)v = (\partial_t - \Delta)u - \eta < 0$. Alla funzione v possiamo quindi applicare la relazione provata in precedenza e perciò $\max_{\overline{\Omega}_T} \{v\} = \max_{\overline{\Gamma}_T} \{v\}$. Inoltre $u = v + \eta t \leq v + \eta T$ per cui

$$\max_{\overline{\Omega}_T} \{u\} = \max_{\overline{\Omega}_T} \{v + \eta t\} \leq \max_{\overline{\Omega}_T} \{v\} + \eta T.$$

D'altra parte $v \leq u$ così $\max_{\overline{\Gamma}_T} \{v\} \leq \max_{\overline{\Gamma}_T} \{u\}$ per cui si ha

$$\max_{\overline{\Omega}_T} \{u\} = \max_{\overline{\Omega}_T} \{v + \eta t\} \leq \max_{\overline{\Omega}_T} \{v\} + \eta T = \max_{\overline{\Gamma}_T} \{v\} + \eta T \leq \max_{\overline{\Gamma}_T} \{u\} + \eta T.$$

Vista l'arbitrarietà di η dalle disuguaglianze precedenti segue che $\max_{\overline{\Omega}_T} \{u\} \leq \max_{\overline{\Gamma}_T} \{u\}$. La disuguaglianza opposta $\max_{\overline{\Omega}_T} \{u\} \geq \max_{\overline{\Gamma}_T} \{u\}$ segue dall'inclusione $\overline{\Gamma}_T \subseteq \overline{\Omega}_T$ e l'unione delle due fornisce la tesi. \blacksquare

Un risultato analogo può essere dimostrato per $\Omega = \mathbb{R}^n$ qualora la funzione u soddisfi però anche una condizione di crescita.

Teorema 4.4 *Sia $u: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ e di classe \mathcal{C}^2 in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$ per la quale si abbia $\partial_t u - \Delta u \leq 0$. Se esistono due costanti reali a, A tali che $u(t, \mathbf{x}) \leq Ae^{a|\mathbf{x}|^2}$ per ogni $(t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ allora*

$$\sup_{[0, T] \times \mathbb{R}^n} \{u(t, \mathbf{x})\} = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{u(0, \mathbf{x})\}.$$

Dim. Supponiamo $4aT < 1$ e sia $\varepsilon > 0$ fissato in modo che $4a(T + \varepsilon) < 1$. Osserviamo che la funzione $K(T - t, i\mathbf{x}) := e^{|\mathbf{x}|^2/4(T-t)}/(4\pi(T-t))^{n/2}$ soddisfa l'equazione della diffusione in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$. Ponendo quindi

$$v_\eta(t, \mathbf{x}) := u(t, \mathbf{x}) - \eta K(T + \varepsilon - t, i\mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x}) - \frac{\eta}{(4\pi(T + \varepsilon - t))^{n/2}} e^{|\mathbf{x}|^2/4(T+\varepsilon-t)}$$

dove $\eta > 0$ è fissato ad arbitrio, abbiamo $(\partial_t - \Delta)v = (\partial_t - \Delta)u \leq 0$. In base al Teorema 4.3 il massimo della funzione v sul dominio $(0, T) \times B_\rho$ è assunto in $C_\rho := [0, T] \times \{\mathbf{x}: |\mathbf{x}| = \rho\}$ o in $D_\rho := \{t = 0\} \times \{\mathbf{x}: |\mathbf{x}| \leq \rho\}$. D'altra parte in C_ρ si ha

$$\begin{aligned} v_\eta(t, \mathbf{x}) &= u(t, \mathbf{x}) - \frac{\eta}{(4\pi(T + \varepsilon - t))^{n/2}} e^{\rho^2/4(T+\varepsilon-t)} \\ &\leq Ae^{a\rho^2} - \frac{\eta}{(4\pi(T + \varepsilon - t))^{n/2}} e^{\rho^2/4(T+\varepsilon-t)} \\ &\leq Ae^{a\rho^2} - \frac{\eta}{(4\pi(T + \varepsilon))^{n/2}} e^{\rho^2/4(T+\varepsilon)} \end{aligned}$$

e questa quantità è negativa, pur di prendere ρ sufficientemente grande (per effetto della condizione $4a(T + \varepsilon) < 1$). Per tali valori di ρ il massimo di v_η è perciò assunto

in D_ρ . Abbiamo così che per ogni t, \mathbf{x} fissati si ha

$$\begin{aligned} v_\eta(t, \mathbf{x}) &\leq \max_{[0, T] \times \overline{B}_\rho} \{v_\eta\} \\ &= \max_{|\mathbf{x}| \leq \rho} \{v_\eta(0, \mathbf{x})\} && \text{per quanto dimostrato prima, per } \rho \text{ suff. grande} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{v_\eta(0, \mathbf{x})\} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{u(0, \mathbf{x})\} && \text{perché } v_\eta \leq u. \end{aligned}$$

Visto che la relazione precedente vale per ogni η , prendendo il limite per $\eta \rightarrow 0$ si ha

$$u(t, \mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} \{u(0, \mathbf{x})\}$$

che è appunto la tesi.

Nel caso la condizione $4aT < 1$ non sia soddisfatta si ottiene la tesi dividendo l'intervallo $(0, T)$ in tratti di ampiezza T' con $4aT' < 1$ ed applicando la tesi a ciascuno di questi intervalli. ■

4.5. Unicità della soluzione del problema di Cauchy

In questa sezione discutiamo brevemente l'unicità della soluzione dell'equazione della diffusione. Anzitutto consideriamo il semplice problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u & \text{in } (0, T) \times [0, 2\pi] \\ u = g & \text{su } \{t = 0\} \times [0, 2\pi] \end{cases}$$

per il quale abbiamo dato una soluzione esplicita nel Teorema 4.1.

Teorema 4.5 *Supponiamo il dato iniziale g in $L^2([0, 2\pi])$. Sia $u = u(t, x)$ una soluzione che sia $\mathcal{C}^1((0, T))$ per qualche $T > 0$ nella variabile temporale t e $\mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ nella variabile spaziale x . Allora u coincide con la funzione determinata in (4.1).*

Ricordiamo che le funzioni $\mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ (\mathcal{C}^2 su un compatto) sono quelle per le quali esiste un prolungamento di classe $\mathcal{C}^2(A)$ ad un aperto A contenente $[0, 2\pi]$. In particolare, quindi, l'assunzione qui fatta sulla regolarità di u sono (leggermente) più forti di quelle sotto le quali è formulato il Teorema 4.1.

Dim. Per ipotesi u è $\mathcal{C}^2([0, 2\pi])$ in spazio, quindi ammette sviluppo in serie di Fourier che converge a u uniformemente in $[0, 2\pi]$ per ogni $t \in (0, T)$ fissato:

$$u(t, x) = \frac{\alpha_0(t)}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n(t)}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) + \frac{\beta_n(t)}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right).$$

+

+

Il fatto che u sia \mathcal{C}^2 garantisce che anche la sua derivata spaziale ha sviluppo di Fourier convergente uniformemente in $[0, 2\pi]$, con sviluppo di Fourier dato dalla serie ottenuta derivando termine a termine lo sviluppo di u :

$$\partial_x u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-n\alpha_n(t)}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) + \frac{n\beta_n(t)}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right).$$

Queste espressioni mostrano chiaramente che

$$(4.6) \quad u(t, 0) = u(t, 2\pi), \quad \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, 2\pi) \quad \forall t \in (0, T).$$

I coefficienti α_n e β_n sono funzioni del tempo e sono espresse dalle usuali relazioni

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(t, x) \, dx, & \alpha_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} u(t, x) \cos(nx) \, dx, \\ \beta_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} u(t, x) \sin(nx) \, dx. \end{aligned}$$

L'ipotesi di dipendenza \mathcal{C}^1 di u da t garantisce che ogni funzione α_n e β_n è anch'essa \mathcal{C}^1 in $(0, T)$, con derivate che possono essere calcolate derivando sotto il segno di integrale. Si ha così ad esempio

$$\dot{\alpha}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \partial_t u(t, x) \cos(nx) \, dx$$

da cui segue, usando l'equazione differenziale, che

$$\dot{\alpha}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \partial_x^2 u(t, x) \cos(nx) \, dx.$$

Integrando per parti due volte e tenuto conto delle condizioni (4.6), si ha

$$\dot{\alpha}_n(t) = \frac{-n^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} u(t, x) \cos(nx) \, dx = -n^2 \alpha_n(t).$$

Analoga relazione si dimostra per $\alpha_0(t)$ e per $\beta_n(t)$. Integrando queste equazioni si ha quindi che $\alpha_0(t) = a'_0$, $\alpha_n(t) = a'_n e^{-n^2 t}$ e $\beta_n(t) = b'_n e^{-n^2 t}$, per ogni $n > 0$, dove le costanti a'_0, a'_n, b'_n sono in \mathbb{R} . Siano ora a_0, a_n e b_n le costanti dello sviluppo di Fourier di g . Consideriamo la disuguaglianza seguente:

$$\begin{aligned} |\alpha_n(t) - a_n| &\leq \int_0^{2\pi} |u(t, x) - g(x)| \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right| \, dx \\ &\leq \|u(t, \cdot) - g\|_2 \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\|_2 \\ &= \|u(t, \cdot) - g\|_2 \end{aligned}$$

+

+

(dove al primo passaggio si è usata la disuguaglianza di Cauchy per il prodotto scalare di $L^2([0, 2\pi])$ e nel secondo il fatto che $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$ ha norma 1 in tale spazio). La relazione precedente mostra che l'ipotesi secondo cui $u(t, \cdot)$ tende a g in norma L^2 per $t \rightarrow 0$ implica che $\alpha_n(t) \rightarrow a_n$, così che abbiamo identificato a'_n con a_n . Analogo argomento mostra che anche a'_0 coincide con a_0 e b'_n con b_n . La tesi è quindi totalmente provata. ■

Per il problema sul segmento siamo riusciti a dimostrare un risultato di unicità a partire dalla sola condizione al tempo $t = 0$. In generale però per avere un risultato di unicità occorre fissare non solo il dato al tempo 0 ma anche il comportamento della soluzione sul bordo del dominio spaziale ad ogni tempo. Abbiamo infatti il seguente risultato.

Teorema 4.6 *Sia Ω un aperto limitato con bordo regolare. Sia u di classe $\mathcal{C}^1([0, T])$ in tempo e $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ in spazio. Allora il problema*

$$(4.7) \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{su } \Gamma_T \end{cases}$$

ammette al più una soluzione.

Dim. Siano per ipotesi u_1, u_2 due soluzioni. La funzione differenza $w := u_1 - u_2$ soddisfa dunque l'equazione della diffusione $\partial_t w = \Delta w$ e d'altra parte essa è nulla in Γ_T . Per il Principio del massimo (Teo. 4.7) si ha $w \leq 0$ in Ω_T . D'altra parte $-w$ soddisfa le medesime ipotesi per cui anche $-w \leq 0$ in Ω_T , così che abbiamo dimostrato che in realtà $w = 0$ in Ω_T . ■

Il Teorema 4.2 enunciato in precedenza mostra che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = g & \text{su } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ha certamente almeno una soluzione quando g è in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per qualche $p \in [1, +\infty]$. A differenza di quanto accade per l'analogo problema su un dominio limitato Ω (vd. Teo. 4.6) non è possibile dimostrare l'unicità di tale soluzione: oltre alla soluzione identicamente nulla, infatti, Tychonoff ha dimostrato⁷ l'esistenza di altre soluzioni del problema omogeneo (il problema con $g \equiv 0$). Tali 'extra' soluzioni sono caratterizzate dal fatto di mostrare picchi di ampiezza rapidamente crescente al divergere di \mathbf{x} : questo è un fatto tipico di tali soluzioni. In effetti è possibile dimostrare il seguente risultato.

⁷Vedasi la Sez. 4.7 di questo capitolo nonché il Cap. 7 di F. John, *Partial differential equations*, 4 ed., Springer, 1982.

Teorema 4.7 *Il problema di Cauchy ha al più una soluzione u per la quale esistano due costanti A, a tali che*

$$|u(t, \mathbf{x})| \leq Ae^{a|\mathbf{x}|^2} \quad \forall t \in (0, T), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dim. Siano u_1, u_2 due soluzioni del problema assegnato entrambe soddisfacenti la stima $\leq Ae^{a|\mathbf{x}|^2}$ in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$ per a, A costanti opportune. Sia $w := u_1 - u_2$. Tale funzione soddisfa l'equazione della diffusione con dato nullo al bordo ed inoltre soddisfa la stima $w \leq Ae^{a|\mathbf{x}|^2}$ in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$. A tale funzione possiamo quindi applicare il principio del massimo nella forma data nel Teorema 4.4, deducendone che $w \leq 0$ in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$. Applicando la medesima costruzione a $-w$ deduciamo che anche $-w \leq 0$ in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$, così che $w = 0$ in $(0, T) \times \mathbb{R}^n$. ■

4.6. Unicità con stime di energia

Nota: i risultati presentati in questa sezione sono tratti da L. C. Evans, *Partial differential equations*, AMS, Providence, RI, 1998.

Diamo ora una diversa ed estremamente significativa dimostrazione del Teorema 4.6. Ricordiamo che tale teorema afferma l'unicità della soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega_T \\ u = g & \text{su } \Gamma_T \end{cases}$$

quando Ω sia un aperto limitato.

Dim. Siano u_1, u_2 due soluzioni del problema assegnato. Sia $w := u_1 - u_2$. Tale funzione soddisfa

$$\begin{cases} \partial_t w = \Delta w & \text{in } \Omega_T \\ w = 0 & \text{su } \Gamma_T \end{cases}$$

ed è di classe $\mathcal{C}^1([0, T])$ in tempo e $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ in spazio. Sia $\omega(t) := \int_{\Omega} w^2(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. Potendo derivare sotto il segno integrale (perché $w \in \mathcal{C}^1([0, T])$ in tempo) abbiamo

$$\dot{\omega}(t) = \int_{\Omega} 2w \partial_t w \, d\mathbf{x}.$$

Usando l'equazione differenziale questo diventa

$$\dot{\omega}(t) = \int_{\Omega} 2w \Delta w \, d\mathbf{x}$$

e visto che w è nulla sul bordo di Ω per ogni tempo t si ha, per integrazione per parti, che

$$\dot{\omega}(t) = - \int_{\Omega} 2|\nabla w|^2 \, d\mathbf{x} \leq 0,$$

così che ω risulta decrescente in $[0, T)$. D'altra parte $\omega(0) = 0$ e certamente è non negativa, per cui possiamo concludere che $\omega(t) = 0$ per ogni t , ovvero che w è nulla in Ω_T . ■

La tecnica appena esposta ammette una interessante variante.

Teorema 4.8 *Sia Ω un aperto limitato con bordo regolare. Siano u_1, u_2 due soluzioni dell'equazione della diffusione in $(0, T) \times \Omega$ di classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega_T})$ con $u_1(t, \mathbf{x}) = u_2(t, \mathbf{x})$ per $t \in (0, T)$ e $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Se esiste $T' \in (0, T)$ con $u_1(T', \mathbf{x}) = u_2(T', \mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$, allora $u_1 = u_2$ in Ω_T .*

Di fatto il teorema afferma che se due soluzioni dell'equazione della diffusione (senza assumere nulla sul tempo $t = 0$, in particolare le due soluzioni potrebbero anche soddisfare condizioni al tempo $t = 0$ diverse) e coincidenti nei punti del bordo del dominio spaziale per ogni tempo, coincidono anche nella intera regione spaziale per qualche tempo T' , allora coincidono per ogni tempo in cui sono entrambe definite.

Dim. Come nella dimostrazione precedente sia $\omega(t) := \int_{\Omega} w^2(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$. La sua derivata è quindi data da

$$\dot{\omega}(t) = \int_{\Omega} 2w\partial_t w d\mathbf{x} = 2 \int_{\Omega} w\Delta w d\mathbf{x} = -2 \int_{\Omega} |\nabla w|^2 d\mathbf{x} = -2\|\nabla w\|_2^2.$$

Visto che per ipotesi w è \mathcal{C}^2 possiamo derivare di nuovo rispetto al tempo, ottenendo

$$\ddot{\omega}(t) = -4 \int_{\Omega} \langle \nabla w, \nabla(\partial_t w) \rangle d\mathbf{x}$$

(si osservi che si è qui usata l'ipotesi $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega_T})$ per garantire che $\partial_t \nabla w = \nabla \partial_t w$) e integrando per parti ed osservando che le ipotesi garantiscono che $\partial_t w = 0$ quando $t \in (0, T)$ e $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ abbiamo

$$\ddot{\omega}(t) = 4 \int_{\Omega} (\Delta w)\partial_t w d\mathbf{x} = 4 \int_{\Omega} (\Delta w)^2 d\mathbf{x} = 4\|\Delta w\|_2^2.$$

D'altra parte

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} w\Delta w d\mathbf{x} \leq \|w\|_2 \cdot \|\Delta w\|_2$$

e dunque

$$(\dot{\omega}(t))^2 = 4\|\nabla w\|_2^4 \leq \|w\|_2^2 \cdot 4\|\Delta w\|_2^2 = \omega(t) \cdot \ddot{\omega}(t).$$

Abbiamo così dimostrato che $\omega(t) \cdot \ddot{\omega}(t) \geq (\dot{\omega}(t))^2$ in $(0, T)$. Supponiamo che w non sia identicamente nullo. Allora esiste un intervallo $[t_1, t_2] \subseteq [0, T']$ con

$$\omega(t) > 0 \quad \text{per } t \in [t_1, t_2], \quad \omega(t_2) = 0.$$

+

+

Per $t \in [t_1, t_2]$ possiamo dunque definire la funzione $f(t) := \log \omega(t)$. La sua derivata seconda è

$$\ddot{f}(t) = \frac{\ddot{\omega}(t)}{\omega(t)} - \frac{(\dot{\omega}(t))^2}{(\omega(t))^2}$$

che per quanto visto prima è non negativa. La funzione f è quindi convessa in (t_1, t_2) . Sia $\tau \in (0, 1)$ e $t \in (t_1, t_2)$. Allora

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t)$$

ovvero

$$0 \leq \omega((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (\omega(t_1))^{1-\tau} \cdot (\omega(t))^\tau \quad \forall \tau \in (0, 1).$$

Visto che $t \in (t_1, t_2)$ è arbitrario, considerando il limite $t \rightarrow t_2^-$ nella relazione precedente e tenuto conto che $\omega(t_2) = 0$ abbiamo che $\omega((1-\tau)t_1 + \tau t_2) = 0$ per ogni $\tau \in (0, 1)$ e quindi $\omega(t) = 0$ in (t_1, t_2) . Questo però è in contraddizione con la definizione dell'intervallo $[t_1, t_2]$; tale intervallo quindi non esiste e $\omega(t) = 0$ per ogni t , completando in tal modo la dimostrazione della tesi. ■

4.7. L'esempio di Tychonoff

In assenza di ipotesi sul comportamento della soluzione u per $x \rightarrow \infty$ il problema omogeneo e con dato al bordo nullo

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{su } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ammette soluzioni non banali. Il primo esempio di questo fenomeno fu trovato da Tychonoff e di seguito vogliamo appunto illustrare la sua costruzione. Non vi è alcuna perdita di generalità nel supporre che u dipenda dal tempo t e dalla sola sua prima coordinata spaziale x ; ciò significa che intendiamo di fatto costruire una soluzione non identicamente nulla del problema della diffusione $\partial_t u = \partial_x^2 u$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $u(0, x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'idea è definire $u(t, x)$ come serie di potenze nella variabile x , ovvero prendere

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(t)}{n!} x^n$$

con h_n funzioni opportune. Supponiamo che ogni h_n sia derivabile e che sia lecito derivare termine a termine, allora l'equazione $\partial_t u = \partial_x^2 u$ diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h'_n(t)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_{n+2}(t)}{n!} x^n.$$

Perché l'equazione sia soddisfatta almeno formalmente è quindi necessario che le funzioni h_n soddisfino la relazione

$$h_{n+2}(t) = h'_n(t) \quad \forall n.$$

+

+

La ricorsione richiede quindi che ogni h_n sia di fatto C^∞ . Fissiamo $h_1(t) = 0$ identicamente e sia h_0 di classe C^∞ per ora indeterminata. La ricorsione mostra che $h_{2k+1}(t) = 0$ e $h_{2k}(t) = h_0^{(k)}(t)$ per ogni k , così che la soluzione u può essere scritta (formalmente) come

$$(4.8) \quad u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_0^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n}.$$

Scegliamo ora $h_0(t) := e^{-1/t^2}$ prolungata in 0 ponendo $h_0(0) := 0$. Tale funzione è $C^\infty(\mathbb{R})$, con $h_0^{(n)}(t) = P_n(1/t)e^{-1/t^2}$ quando $t \neq 0$ e $h_0^{(n)}(0) = 0$, dove P_n è un polinomio la cui definizione, ricorsiva, è:

$$P_0(w) = 1, \quad P_{n+1}(w) = -w^2 P_n'(w) + 2w^3 P_n(w).$$

Per poter dimostrare la convergenza della serie serve una stima di $P_n(w)$, possibilmente uniforme per w in opportuni sottoinsiemi.

Lemma *Sia $\rho > 0$ fissato e sia $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \geq \rho$. Allora per ogni n vale*

$$|P_n(w)| \leq (2 + 3e\rho^{-2})^n n! |w|^{3n}.$$

Dim. La tesi è certamente vera per $n = 0$ (dove 0^0 è inteso come 1). Sia vera per n così che $|P_n(w)| \leq (2 + 3e\rho^{-2})^n n! |w|^{3n}$. La formula integrale di Cauchy dà per la derivata la rappresentazione

$$P_n'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_n(z)}{(z-w)^2} dz$$

dove γ è la circonferenza centrata in w , di raggio r ed orientata in senso antiorario. A partire da questa rappresentazione si ha

$$|P_n'(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{z \in \gamma} |P_n(z)|}{r^2} 2\pi r$$

e dalla ipotesi induttiva segue

$$|P_n'(w)| \leq (2 + 3e\rho^{-2})^n n! \frac{\max_{z \in \gamma} |z|^{3n}}{r}.$$

Il massimo valore di $|z|$ su γ è $|w| + r$, quindi abbiamo

$$|P_n'(w)| \leq (2 + 3e\rho^{-2})^n n! \frac{(|w| + r)^{3n}}{r}.$$

In questa espressione possiamo prendere qualunque $r > 0$. La nostra scelta è prendere $r = \alpha|w|$, dove α è una costante positiva che sceglieremo in seguito. Con tale scelta si ha

$$|P_n'(w)| \leq (2 + 3e\rho^{-2})^n n! \frac{(1 + \alpha)^{3n}}{\alpha} |w|^{3n-1}.$$

+

+

Fissando $\alpha = 1/(3n)$ abbiamo $\frac{(1+\alpha)^{3n}}{\alpha} = 3n(1 + 1/(3n))^{3n} < 3en$, e quindi

$$|P'_n(w)| \leq (2 + 3e\rho^{-2})^n n! 3en |w|^{3n-1}.$$

Dalla legge ricorsiva si ha

$$\begin{aligned} |P_{n+1}(w)| &\leq |w|^2 |P'_n(w)| + 2|w|^3 |P_n(w)| \\ &\leq (2 + 3e\rho^{-2})^n n! 3en |w|^{3n+1} + 2(2 + 3e\rho^{-2})^n n! |w|^{3(n+1)} \\ &= (3en|w|^{-2} + 2)(2 + 3e\rho^{-2})^n n! |w|^{3(n+1)} \\ &\leq (2 + 3e\rho^{-2})^{n+1} (n+1)! |w|^{3(n+1)}. \end{aligned}$$

■

Dal lemma precedente segue che per t_0 fissato e $0 < t \leq t_0$ si ha

$$\left| \frac{h_0^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq (2 + 3et_0^2)^n |t|^{-3n} \frac{n! e^{-1/t^2}}{(2n)!} x^{2n}$$

che, tramite la disuguaglianza elementare $\frac{n!}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!}$, diventa

$$(4.9) \quad \left| \frac{h_0^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq (2 + 3et_0^2)^n |t|^{-3n} \frac{e^{-1/t^2}}{n!} x^{2n}$$

dalla quale segue:

1. la serie (4.8) e la serie delle sue derivate parziali rispetto a t convergono uniformemente nei compatti di $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$,
2. u è quindi effettivamente una soluzione dell'equazione della diffusione,
3. $u(0, x) = 0$ per ogni x ,
4. dalla (4.9) segue che per $t \in (0, t_0)$ si ha

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{h_0^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2 + 3et_0^2)^n |t|^{-3n} \frac{e^{-1/t^2}}{n!} x^{2n} \\ &\leq e^{-1/t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{(2 + 3et_0^2)x^2}{t^3} \right)^n \\ &= \exp(-1/t^2 + (2 + 3et_0^2)x^2/t^3) \end{aligned}$$

che è una stima della forma $|u(t, x)| \leq Ae^{ax^2}$ considerata nel Teorema 4.7 ma in cui le costanti A e a dipendono da t (e d'altra parte una stima di quella forma con A ed a non dipendenti da t non può esistere, altrimenti per il Teorema 4.7 la funzione dovrebbe essere identicamente nulla).

+

+

+

+

CAPITOLO 5

Soluzioni deboli: il teorema di Lax-Milgram

Nota: Questo capitolo è una rielaborazione dal Capitolo 5 di E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 2005.

Vogliamo ora studiare equazioni alle derivate parziali della forma

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega,$$

dove L è un generico operatore differenziale a coefficienti costanti e quindi è della forma

$$L := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha, \quad \text{con } a_\alpha \in \mathbb{C} \quad \forall |\alpha| \leq k,$$

f è continua in Ω ed Ω è un aperto *limitato* di \mathbb{R}^n . Sia $u \in C^k(\Omega)$ una soluzione dell'equazione e sia $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione C^∞ a supporto compatto in Ω . Dalla relazione $Lu = f$ segue che

$$\langle \psi, Lu \rangle = \langle \psi, f \rangle,$$

dove con $\langle g, h \rangle$ abbiamo indicato il consueto prodotto scalare integrale

$$\langle g, h \rangle := \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \overline{h(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x}.$$

Siano $g, h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni qualsiasi di classe C^∞ con h a supporto compatto. A seguito della formula di integrazione per parti si ha

$$\int_{\Omega} g(\mathbf{x}) (\partial_j h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\partial_j g)(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

poiché il termine di bordo è nullo per la compattezza del supporto di h . Il fatto che Ω sia un dominio di \mathbb{R}^n e che quindi le variabili da cui g ed h dipendono siano reali fa sì che gli operatori di derivazione e di coniugio commutino. Dalla relazione precedente segue allora che

$$\begin{aligned} \langle g, \partial_j h \rangle &= \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \overline{\partial_j h(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \partial_j \overline{h(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} \partial_j (g(\mathbf{x})) \overline{h(\mathbf{x})} \, d\mathbf{x} = \langle -\partial_j g, h \rangle. \end{aligned}$$

+

+

Iterando questa identità possiamo dunque concludere che

$$\langle \psi, Lu \rangle = \langle L^* \psi, u \rangle$$

dove

$$L^* := \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha| \leq k}} (-1)^{|\alpha|} \overline{a_\alpha} \partial^\alpha$$

è, per definizione, l'operatore aggiunto associato ad L . La relazione $Lu = f$ produce quindi la nuova relazione

$$(5.1) \quad \langle L^* \psi, u \rangle = \langle \psi, f \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Alla luce di questa osservazione risulta dunque chiara l'utilità della seguente definizione.

Def. 5.1 Dato l'aperto Ω limitato ed una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua (o più in generale una funzione in $L^p(\Omega)$ per qualche p), chiamiamo *soluzione debole* del problema $Lu = f$ qualsiasi funzione u misurabile per la quale valga la (5.1).

In base al ragionamento precedente, infatti, ogni soluzione del problema originario $Lu = f$ risulta automaticamente essere anche una soluzione debole. D'altra parte, invertendo il ragionamento precedente è facile rendersi conto che ogni soluzione debole u che sia di classe \mathcal{C}^k è di fatto una soluzione del problema $Lu = f$ originario. Viste tali relazioni con le soluzioni deboli, le soluzioni del problema originario $Lu = f$ con $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ sono anche dette *soluzioni forti* e come suggerito dalla stessa terminologia adottata, le soluzioni deboli sono in genere funzioni con proprietà di regolarità più deboli delle soluzioni forti; salvo quindi rare situazioni (legate alla particolare struttura dell'operatore differenziale L) non è vero che una soluzione debole sia anche soluzione forte. Ne segue che il passaggio alla formulazione debole costituisce una notevole generalizzazione del problema differenziale. Grazie a questa generalizzazione risulta più facile trovare soluzioni (deboli) delle equazioni: la generalizzazione infatti fa sì che esse vengano cercate in insiemi di funzioni molto più ampi. Una importante manifestazione di questo principio è rappresentato dal seguente risultato.

Teorema 5.1 (Lax-Milgram) Sia Ω un aperto limitato e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in $L^2(\Omega)$. Allora il problema differenziale $Lu = f$ ammette sempre una soluzione debole. La soluzione debole può essere scelta così da dipendere in modo continuo dal dato f . Detto in altre parole, esiste un operatore continuo $S: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ che ad ogni f associa una soluzione debole Sf la cui norma $L^2(\Omega)$ è limitata dalla norma $L^2(\Omega)$ di f tramite una costante dipendente unicamente da Ω ed L .

Si osservi che il teorema non dice nulla sulla eventuale unicità della soluzione. Questo è inevitabile poiché in assenza di richieste sul comportamento di u sul bordo di Ω o di altre condizioni al contorno, il problema omogeneo associato $Lu = 0$ ammette sempre infinite soluzioni. Per convincersi di ciò basta osservare che se

$u(\mathbf{x})$ è in realtà cercata tra le funzioni della sola variabile x_1 , ovvero se $u(\mathbf{x}) := \tilde{u}(x_1)$, allora l'equazione $Lu = 0$ diventa per \tilde{u} una equazione differenziale ordinaria lineare ed a coefficienti costanti: è noto che tale equazione ammette sempre infinite soluzioni.

Oss. 5.1 Il seguente esempio ripreso dalla teoria della equazione delle onde dimostra che anche le soluzioni deboli sono fisicamente interessanti.

Già D'Alembert notò che l'equazione delle onde $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ ammette come soluzione la funzione

$$u(t, x) := f(x - t) + g(x + t)$$

dove f, g sono due qualsiasi funzioni di classe \mathcal{C}^2 . In questa espressione $f(x - t)$ rappresenta un'onda propagantesi nel senso delle x crescenti mentre $g(x + t)$ rappresenta un'onda propagantesi nel senso opposto. Consideriamo una corda vibrante che sia stata pizzicata al tempo 0 e per la quale, quindi, la configurazione della corda al tempo $t = 0$ sia data da una funzione f con un grafico simile a quello indicata in figura.

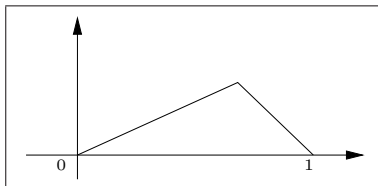


FIGURA 5.1. Il dato iniziale per la corda pizzicata.

Si osservi che ad ogni tempo la soluzione deve valere zero nei punti $x = 0$ ed $x = 1$, corrispondenti ai punti di attacco della corda. Il problema corrispondente alla situazione in esame è quindi il seguente:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u & \text{in } (0, 1) \\ u(0, x) = f(x) & \text{in } [0, 1] \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{per ogni } t. \end{cases}$$

Si osservi che f è lineare a tratti, con $f(0) = f(1) = 0$, ma non è \mathcal{C}^2 nel suo dominio. Estendiamo f al segmento $(-1, 1)$ ponendo $f(-z) = -f(z)$ per $z \in (0, 1)$ così da avere una funzione dispari, successivamente estendiamo f all'intero asse reale per periodicità con periodo 2. Otteniamo così una funzione il cui grafico è indicato nella figura seguente

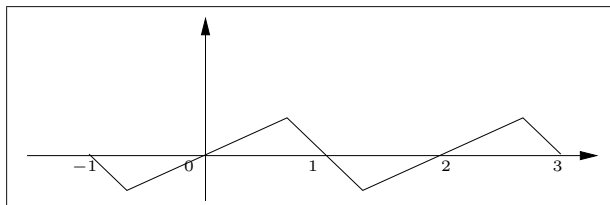


FIGURA 5.2. L'estensione dispari e periodica del dato iniziale per il problema della corda pizzicata.

Si consideri la funzione

$$u(t, x) := \frac{1}{2}f(x - t) + \frac{1}{2}f(x + t).$$

Grazie alla particolare estensione di f si ha che $2u(t, 0) = f(-t) + f(t) = 0$ e $2u(t, 1) = f(1 - t) + f(1 + t) = f(1 - t) + f(-2 + 1 + t) = f(1 - t) + f(-1 + t) = f(1 - t) - f(1 - t) = 0$, ovvero $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ per ogni tempo. Inoltre $u(0, x) = f(x)$ e quindi coincide con il dato iniziale. La funzione u così determinata soddisfa quindi tutte le condizioni al contorno per la corda pizzicata, tuttavia *non* soddisfa l'equazione delle onde (visto che f *non* è C^2). D'altra parte, sia $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ una qualsiasi successione di funzioni che converge uniformemente in \mathbb{R} ad f ; sia $u_n(t, x) := \frac{1}{2}f_n(x - t) + \frac{1}{2}f_n(x + t)$ la soluzione dell'equazione delle onde costruita con il metodo precedente a partire dalle f_n . Ogni u_n è soluzione forte, quindi è anche soluzione debole ovvero

$$\langle L^* \psi, u_n \rangle = 0 \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

La compattezza del supporto di ψ (e quindi di $L^* \psi$) e la convergenza uniforme di u_n a u consentono di calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ in ciascuna delle relazioni precedenti passando il limite all'interno del prodotto scalare, dimostrando così che

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle L^* \psi, u_n \rangle = \langle L^* \psi, u \rangle \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Ciò dimostra che u , pur non essendo una soluzione forte dell'equazione delle onde, ne è comunque una soluzione debole. \square

Come vedremo la dimostrazione del teorema è una applicazione della teoria degli spazi di Hilbert abbinata alla fondamentale disuguaglianza seguente.

Proposizione 5.1 *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n e sia L^* l'operatore differenziale aggiunto definito in precedenza. Esiste una costante $c > 0$ dipendente unicamente da Ω ed L^* tale che*

$$(5.2) \quad \langle L^* \psi, L^* \psi \rangle \geq c \langle \psi, \psi \rangle$$

per ogni funzione $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Spetta a P. Lax e A. Milgram il merito di aver mostrato in un setting molto generale come disuguaglianze (dette *disuguaglianze di coercitività*) tipo quella in (5.2) consentano di dimostrare teoremi di esistenza tipo il Teorema 5.1 (ed è per tal motivo che troviamo corretto attribuire a loro il Teo. 5.1, almeno all'interno di queste note).

La difficoltà della dimostrazione del teorema sta soprattutto nel provare la validità della disuguaglianza (5.2). Posponiamo quindi la sua dimostrazione e per il momento ci concentriamo sulla dimostrazione del teorema.

Dim. (Teorema 5.1) Sia \mathcal{H}_0 lo spazio vettoriale $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dotato del prodotto scalare

$$(\phi, \psi) := \langle L^* \phi, L^* \psi \rangle.$$

Il prodotto scalare (\cdot, \cdot) è strettamente definito positivo poiché se $(\psi, \psi) = 0$ allora dalla (5.2) segue che $\langle \psi, \psi \rangle = 0$ la quale a sua volta implica che $\psi(\mathbf{x}) = 0$ identicamente. Lo spazio \mathcal{H}_0 è quindi pre-hilbertiano¹. Il prodotto scalare (\cdot, \cdot) dà luogo in \mathcal{H}_0 ad una norma $\|\cdot\|$ definita da

$$\|\psi\| := \sqrt{(\psi, \psi)} = \sqrt{\langle L^* \psi, L^* \psi \rangle}.$$

In base alla relazione (5.2) si ha $\|\psi\| \geq c \|\psi\|_2$ la quale mostra che ogni successione di Cauchy nello spazio normato $(\mathcal{H}_0, \|\cdot\|)$ è anche una successione di Cauchy in $(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \|\cdot\|_2)$. È noto che ogni spazio pre-hilbertiano ammette un completamento ad uno spazio di Hilbert; la relazione precedente mostra che il completamento di $(\mathcal{H}_0, \|\cdot\|)$ può essere pensato come un sottospazio chiuso del completamento di $(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \|\cdot\|_2)$. D'altra parte il completamento di $(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \|\cdot\|_2)$ è $L^2(\Omega)$ (vd. l'osservazione che segue il Teo. 1.1); possiamo quindi concludere che il completamento di $(\mathcal{H}_0, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Hilbert \mathcal{H} identificabile con un sottospazio chiuso di $L^2(\Omega)$. L'operatore $L^*: \mathcal{H}_0 \rightarrow L^2(\Omega)$ è continuo, visto che

$$\|L^* \psi\|_2^2 = \langle L^* \psi, L^* \psi \rangle = \|\psi\|^2.$$

Esso ha quindi una estensione (unica) ad un operatore lineare continuo $\mathcal{H} \rightarrow L^2(\Omega)$ che, con abuso di notazione, indichiamo ancora come L^* .

Consideriamo la mappa

$$\ell_f: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ell_f(\psi) := \langle \psi, f \rangle.$$

Evidentemente si tratta di un funzionale lineare su \mathcal{H}_0 . Osserviamo che

$$(5.3) \quad |\ell_f(\psi)| = |\langle \psi, f \rangle| \leq \|\psi\|_2 \cdot \|f\|_2 \leq \frac{1}{c} \|\psi\| \cdot \|f\|_2 = \frac{1}{c} \|f\|_2 \cdot \|\psi\|,$$

relazione che mostra che ℓ_f è continuo in \mathcal{H}_0 . Un funzionale lineare continuo su uno spazio pre-hilbertiano ammette sempre una (unica) estensione ad un funzionale lineare continuo definito sul completamento dello spazio e il funzionale così individuato ha la medesima norma. Con un abuso di notazione indichiamo ancora

¹È detto *spazio pre-hilbertiano* qualsiasi spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare strettamente definito positivo.

+

+

con ℓ_f il funzionale continuo definito in \mathcal{H} . Il teorema di rappresentazione di Riesz garantisce l'esistenza di un elemento $\tilde{u} \in \mathcal{H}$ tale che $\ell_f(\cdot) = (\cdot, \tilde{u})$, ovvero tale che

$$\langle \psi, f \rangle = \ell_f(\psi) = (\psi, \tilde{u}) = \langle L^* \psi, L^* \tilde{u} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

La funzione $u := L^* \tilde{u}$ è quindi un elemento di $L^2(\Omega)$ che soddisfa la relazione che definisce le soluzioni deboli. Il teorema di Riesz garantisce anche che la norma del funzionale è uguale a quella dell'elemento che lo rappresenta; abbiamo quindi

$$\|L^* \tilde{u}\|_2 = \|\tilde{u}\| = \|\ell_f\|;$$

d'altra parte, la relazione (5.3) dimostra che $\|\ell_f\| \leq \frac{1}{c} \|f\|_2$ e quindi

$$\|L^* \tilde{u}\|_2 \leq \frac{1}{c} \|f\|_2.$$

Questa disuguaglianza mostra che la mappa $S: f \rightarrow L^* \tilde{u}$ è continua, se vista come mappa da $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, concludendo così la dimostrazione del teorema. ■

Passiamo ora alla dimostrazione della (5.2). Anzitutto un lemma.

Lemma 5.1 *Sia P un polinomio in $\mathbb{C}[z]$ monico² e sia F una funzione olomorfa in \mathbb{C} . Allora*

$$|F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})F(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Dim. Il fatto che F sia olomorfa dà l'uguaglianza

$$2\pi F(0) = \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) d\theta$$

da cui segue (usando la disuguaglianza di Cauchy)

$$2\pi |F(0)| \leq \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})| d\theta \leq \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right]^{1/2} \cdot \left[\int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2 d\theta \right]^{1/2}$$

ovvero

$$(5.4) \quad |F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

che è la tesi nel caso particolare in cui $P = 1$.

Consideriamo ora il generico polinomio monico P e sia

$$P(z) = \prod_{|\alpha| \geq 1} (z - \alpha) \prod_{|\beta| < 1} (z - \beta) =: P_1(z) P_2(z)$$

la sua fattorizzazione come prodotto dei termini associati alle radici di modulo ≥ 1 (il polinomio P_1) e di modulo < 1 (il polinomio P_2). Osserviamo che $|P_1(0)| = \prod_{|\alpha| \geq 1} |\alpha| \geq 1$. Per ciascuna radice β consideriamo la funzione $\psi_\beta := -\frac{z-\beta}{1-\beta z}$. Questa funzione (nota con il nome di *fattore di Blaschke*) è olomorfa nel disco

²Un polinomio è detto *monico* quando il coefficiente del suo termine di grado massimo è 1.

+

+

+

+

chiuso di raggio 1 e centro 0, si annulla in β , ed ha modulo costante 1 nei punti di modulo 1 visto che

$$|\psi_\beta(e^{i\theta})| = \left| -\frac{e^{i\theta} - \beta}{1 - \bar{\beta}e^{i\theta}} \right| = \left| -\frac{1}{e^{i\theta}} \cdot \frac{e^{i\theta} - \beta}{e^{-i\theta} - \bar{\beta}} \right| = 1.$$

Sia dunque $\tilde{P}_2(z) := \prod_{|\beta|<1} (1 - \bar{\beta}z)$ e sia \tilde{P} il nuovo polinomio definito da $\tilde{P}(z) := P_1(z)\tilde{P}_2(z)$. Dalle osservazioni precedenti segue che $|\tilde{P}(0)| \geq 1$ e che $|\tilde{P}(e^{i\theta})| = |P(e^{i\theta})|$ per ogni θ . Tenuto conto di ciò, se applichiamo la disuguaglianza (5.4) alla funzione $\tilde{P}(z)F(z)$ otteniamo:

$$|F(0)|^2 \leq |\tilde{P}(0)F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{P}(e^{i\theta})F(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})F(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

che è appunto la tesi. ■

Per poter procedere dobbiamo generalizzare il lemma precedente al caso multidimensionale. Ecco il risultato corrispondente.

Lemma 5.2 *Sia P un polinomio in $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ e sia $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in ciascuna delle sue variabili. Allora*

$$|c_P|^2 \cdot |F(\mathbf{o})|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} |P(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})F(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})|^2 d\theta,$$

dove c_P è una costante individuata con la seguente procedura: tra le n -uple di interi (m_1, \dots, m_n) consideriamo l'ordinamento lessicografico secondo cui

$$(m_1, \dots, m_n) \succ (m'_1, \dots, m'_n)$$

se esiste k tale che $m_j = m'_j$ per $j = 1, \dots, k-1$ e $m_k \geq m'_k$. Allora c_P è quel coefficiente $\alpha_{m_1, m_2, \dots, m_n} \neq 0$ di P il cui multiindice è massimo secondo l'ordinamento lessicografico tra i multiindici dei coefficienti di P non nulli.

Un esempio che mostri come determinare c_P sarà certamente gradito. Prendiamo $P(z_1, z_2) = 2z_1^3(5 + 3z_2^2) - 4z_1^2z_2^5$. Tra i coefficienti con n_1 massimo vi sono $\alpha_{3,0}$ (che vale 10) e $\alpha_{3,2}$ (che vale 6). Tra i coefficienti α_{3,n_2} quello con n_2 massimo è $\alpha_{3,2}$: la costante c_P vale quindi 6.

Si noti che il termine a destra della disuguaglianza del lemma è indipendente dalla numerazione delle variabili z_1, \dots, z_n mentre ciò non accade per c_P . Ad esempio, per il polinomio precedente si ha $c_P = 6$ mentre per il polinomio $Q(z_1, z_2) = 2z_2^3(5 + 3z_1^2) - 4z_2^2z_1^5$ (ottenuto da P scambiando z_1 con z_2) si ha $c_P = -4$. ciò significa che, se volessimo, potremmo sostituire $|c_P|$ con una costante, di valore assoluto maggiore, pari al massimo tra le costanti $|c_P|$ al variare dell'ordine con cui le variabili z_1, \dots, z_n sono numerate. Così facendo restaureremmo la indipendenza dall'ordine della numerazione delle variabili z_1, \dots, z_n nella disuguaglianza. In seguito non avremo bisogno però di questo per cui manteniamo per c_P la definizione data nel lemma.

+

+

Dim. Fissiamo il valore delle variabili z_2, \dots, z_n e consideriamo $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$ quale polinomio nella sola variabile z_1 . Sia $P_1 \in \mathbb{C}[z_2, \dots, z_n]$ il polinomio che è il coefficiente in P del termine di grado massimo in z_1 . In base al Lemma 5.1 abbiamo

$$|P_1(z_2, \dots, z_n)|^2 \cdot |F(0, z_2, \dots, z_n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta_1}, z_2, \dots, z_n) F(e^{i\theta_1}, z_2, \dots, z_n)|^2 d\theta_1$$

dove il termine $|P_1(z_2, \dots, z_n)|^2$ è stato introdotto per tener conto del fatto che P non è monico. Se poniamo $z_2 = e^{i\theta_2}$ nella relazione precedente ed integriamo in $\theta_2 \in [0, 2\pi]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} |P_1(e^{i\theta_2}, \dots, z_n) F(0, e^{i\theta_2}, \dots, z_n)|^2 \\ \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} |P(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, z_n) F(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, z_n)|^2 d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

Sempre il Lemma 5.1 mostra che

$$|P_2(z_3, \dots, z_n)|^2 \cdot |F(0, 0, \dots, z_n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} |P_1(e^{i\theta_2}, \dots, z_n) F(0, e^{i\theta_2}, \dots, z_n)|^2$$

dove $P_2(z_3, \dots, z_n)$ è il coefficiente del termine di grado massimo nella variabile z_2 nel polinomio P_1 . Tenuto conto di ciò abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} |P_2(z_3, \dots, z_n)|^2 \cdot |F(0, 0, \dots, z_n)|^2 \\ \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[0, 2\pi]^2} |P(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, z_n) F(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, z_n)|^2 d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

Iterando l'argomento precedente si ottiene la tesi. \blacksquare

Finalmente possiamo dimostrare la disuguaglianza (5.2) che, lo ricordiamo, afferma che $\|\psi\| \leq c\|L^*\psi\|$ per una opportuna costante $c > 0$ e per ogni $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ nel caso in cui Ω sia un aperto limitato di \mathbb{R}^n . Sia f una funzione a quadrato integrabile con supporto in $[-M, M]^n$. Allora la sua trasformata di Fourier

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{[-M, M]^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \zeta \rangle} d\mathbf{x}$$

è ben definita per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^n$. In realtà l'integrale converge per ogni $\zeta \in \mathbb{C}^n$ così che \hat{f} può essere pensata come funzione $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Si osservi che \hat{f} risulta olomorfa nella sua dipendenza da ciascuna coordinata ζ_j . Per comodità scriviamo $\zeta \in \mathbb{C}^n$ come $\xi + i\eta$, dove $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$. Di conseguenza

$$\hat{f}(\xi + i\eta) = \int_{[-M, M]^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi \langle \mathbf{x}, \eta \rangle} e^{-2\pi i \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} d\mathbf{x}$$

e l'identità di Plancherel dà

$$(5.5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta})|^2 d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})e^{-2\pi\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\eta}\rangle}|^2 d\mathbf{x} \\ = \int_{[-M,M]^n} |f(\mathbf{x})e^{-2\pi\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\eta}\rangle}|^2 d\mathbf{x} \leq e^{4\pi\sqrt{n}M|\boldsymbol{\eta}|} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

dove si è usato il fatto che per $\mathbf{x} \in [-M, M]^n$ si ha $|\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\eta}\rangle| \leq \sqrt{n}M|\boldsymbol{\eta}|$. La relazione precedente fornisce una stima della norma $L^2(\mathbb{R}^n)$ di \hat{f} nella sua dipendenza dalla variabile $\boldsymbol{\eta}$. Sia

$$L^* := \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \\ |\boldsymbol{\alpha}| \leq k}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \overline{a_{\boldsymbol{\alpha}}} \partial^{\boldsymbol{\alpha}}$$

l'operatore differenziale aggiunto. Sia $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, allora

$$\widehat{L^*\psi}(\boldsymbol{\zeta}) = \int_{\mathbb{R}^n} (L^*\psi)(\mathbf{x})e^{-2\pi i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}\rangle} d\mathbf{x} = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \\ |\boldsymbol{\alpha}| \leq k}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \overline{a_{\boldsymbol{\alpha}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\psi)(\mathbf{x})e^{-2\pi i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}\rangle} d\mathbf{x}$$

ed integrando per parti abbiamo

$$= \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \\ |\boldsymbol{\alpha}| \leq k}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \overline{a_{\boldsymbol{\alpha}}} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i\boldsymbol{\zeta})^{\boldsymbol{\alpha}} \psi(\mathbf{x})e^{-2\pi i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\zeta}\rangle} d\mathbf{x}$$

così che se poniamo

$$Q(\boldsymbol{\zeta}) := \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \\ |\boldsymbol{\alpha}| \leq k}} (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \overline{a_{\boldsymbol{\alpha}}} (2\pi i\boldsymbol{\zeta})^{\boldsymbol{\alpha}},$$

abbiamo

$$(5.6) \quad \widehat{L^*\psi}(\boldsymbol{\zeta}) = Q(\boldsymbol{\zeta})\hat{\psi}(\boldsymbol{\zeta}) \quad \forall \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

L'azione di L^* diventa così, se letta sul lato 'Fourier', la moltiplicazione per il polinomio Q . Sia ora M sufficientemente grande perché si abbia $\Omega \subset [-M, M]^n$. A partire dalla (5.5) applicata alla funzione $L^*\psi$ e tenuto conto della (5.6) abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Q(\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta})\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta})|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq e^{4\pi\sqrt{n}M|\boldsymbol{\eta}|} \int_{\mathbb{R}^n} |L^*\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

In questa relazione prendiamo $\eta_j = \sin\theta_j$ per ogni j (da cui segue $|\boldsymbol{\eta}| \leq \sqrt{n}$) e facciamo una traslazione $\xi_j \rightarrow \xi_j + \cos\theta_j$, sempre per ogni j , ottenendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Q(\xi_1 + e^{i\theta_1}, \dots, \xi_n + e^{i\theta_n})\hat{\psi}(\xi_1 + e^{i\theta_1}, \dots, \xi_n + e^{i\theta_n})|^2 d\boldsymbol{\xi} \leq e^{4\pi nM} \int_{\mathbb{R}^n} |L^*\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Se integriamo questa relazione nelle variabili $\theta_j \in [0, 2\pi]$, abbiamo (dopo aver usato il teorema di Tonelli per giustificare lo scambio nell'ordine di integrazione)

$$(5.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} |Q(\xi_1 + e^{i\theta_1}, \dots, \xi_n + e^{i\theta_n}) \hat{\psi}(\xi_1 + e^{i\theta_1}, \dots, \xi_n + e^{i\theta_n})|^2 d\theta d\xi \\ \leq e^{4\pi n M} \int_{\mathbb{R}} |L^* \psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Per il Lemma 5.2 applicato al polinomio $Q_{\xi}(\mathbf{z}) := Q(\xi + \mathbf{z})$ (visto come polinomio nelle variabili \mathbf{z} , con le variabili ξ quali parametri) ed alla funzione $F_{\xi}(\mathbf{z}) := \hat{\psi}(\xi + \mathbf{z})$ esiste una costante $c_{Q_{\xi}} \in \mathbb{C}$ non nulla tale che

$$|c_{Q_{\xi}}|^2 \cdot |\hat{\psi}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} |Q(\xi_1 + e^{i\theta_1}, \dots, \xi_n + e^{i\theta_n}) \hat{\psi}(\xi_1 + e^{i\theta_1}, \dots, \xi_n + e^{i\theta_n})|^2 d\theta.$$

La costante $c_{Q_{\xi}}$ dipende dal polinomio Q_{ξ} e quindi, a priori, dipende da ξ (perché al variare di ξ cambia il polinomio al quale il lemma è applicato). Fortunatamente il lemma afferma anche che $c_{Q_{\xi}}$ è quel coefficiente $\alpha_{m_1, \dots, m_n} \neq 0$ del polinomio Q_{ξ} il cui multiindice è massimo secondo l'ordinamento lessicografico e si dimostra facilmente che tale coefficiente all'interno del polinomio $Q_{\xi}(\mathbf{z})$ non dipende da ξ ³. La costante $c_{Q_{\xi}}$ è quindi un numero complesso non nullo indipendente da ξ che perciò possiamo lecitamente indicare semplicemente come c_Q . Abbiamo quindi

$$(5.8) \quad |c_Q|^2 \cdot |\hat{\psi}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0, 2\pi]^n} |Q(\xi_1 + e^{i\theta_1}, \dots, \xi_n + e^{i\theta_n}) \hat{\psi}(\xi_1 + e^{i\theta_1}, \dots, \xi_n + e^{i\theta_n})|^2 d\theta.$$

Dalle (5.7) e (5.8) segue allora che

$$|c_Q|^2 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \leq e^{4\pi n M} \int_{\mathbb{R}^n} |L^* \psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Per l'identità di Plancherel si ha $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ così che la relazione precedente diventa

$$|c_Q|^2 \cdot \|\psi\|_2^2 = |c_Q|^2 \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(\xi)|^2 d\xi \leq e^{4\pi n M} \int_{\mathbb{R}^n} |L^* \psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = e^{4\pi n M} \|L^* \psi\|_2^2$$

che dimostra la tesi.

³Si consideri ad esempio il polinomio $Q(z_1, z_2) := 10z_1^3 + 6z_1^2 z_2^2 - 4z_1^2 z_2^5$. Per tale polinomio si ha

$$Q_{\xi}(z_1, z_2) := Q(\xi_1 + z_1, \xi_2 + z_2) = 10(\xi_1 + z_1)^3 + 6(\xi_1 + z_1)^3 (\xi_2 + z_2)^2 - 4(\xi_1 + z_1)^2 (\xi_2 + z_2)^5 \\ = 10z_1^3 + 6z_1^3 z_2^2 - 4z_1^2 z_2^5 + \tilde{Q}(\xi_1, \xi_2, z_1, z_2) = Q(z_1, z_2) + \tilde{Q}(\xi_1, \xi_2, z_1, z_2)$$

dove il grado di $\tilde{Q}(\xi_1, \xi_2, z_1, z_2)$ in z_1 è inferiore a 3. Ne segue che il coefficiente non nullo e con indice massimo (secondo l'ordine lessicografico) in $Q_{\xi}(z_1, z_2)$ proviene in realtà dal polinomio $Q(z_1, z_2)$ e che in particolare esso è indipendente da ξ . Nel caso in esame la costante $c_{Q_{\xi}}$ è 6 per ogni ξ .

Lecture consigliate

Alcuni testi propedeutici:

- L. V. Ahlfors, *Complex analysis*, Third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 2003.

Alcuni testi di approfondimento:

- W. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998.
- P. R. Garabedian, *Partial differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.
- D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- P. E. Hydon, *Symmetry methods for differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- F. John, *Partial differential equations*, Springer, 1982.
- M. Spivak, *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 2005.
- W. A. Strauss, *Partial differential equations: an introduction*, ed. 2, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2008.

Matematici citati

- Pavel Sergeevich **Aleksandrov**. Bogorodsk (ora Noginsk, Russia) 7-5-1896, Mosca 16-11-1982.
- Stefan **Banach**. Cracovia 30-3-1892, Lvov (Ucraina) 31-8-1945.
- Wilhelm Johann Eugen **Blaschke**. Graz 13-9-1885, Amburgo 17-3-1962.
- Friedrich **Bessel**. Minden 22-7-1784, Königsberg, Prussia (ora Kaliningrad, Russia) 17-3-1846.
- Augustin Louis **Cauchy**. Parigi 21-8-1789, Sceaux (Francia) 23-5-1857.
- Jean Le Rond **d'Alembert**. Parigi 17-11-1717, Parigi 29-10-1783.
- Leonhard **Euler**. Basilea 15-4-1707, San Pietroburgo 18-9-1783.
- Michael **Faraday**. Newington Butts (Londra) 22-9-1791, Hampton Court (Inghilterra) 25-8-1867.
- Jean Baptiste Joseph **Fourier**. Auxerre (Francia) 21-3-1768, Parigi 16-5-1830.
- Guido **Fubini**. Venezia 19-1-1879, New-York 6-6-1943.
- Johann Carl Friedrich **Gauss**. Brunswick-Lüneburg (Germania) 30-4-1777, Gottinga 23-2-1855.
- Carolyn **Gordon**.
- George **Green**. Sneinton (Gran Bretagna) 7-1793, Sneinton 31-5-1841.
- Carl Gustav Axel **Harnack**. 1851 (Germania), 1888.
- David **Hilbert**. Königsberg, Prussia (ora Kaliningrad, Russia) 23-1-1862, Gottinga 14-2-1943.
- Otto Ludwig **Hölder**. Stoccarda 22-12-1859, Lipsia 29-8-1937.
- Johan Ludwig William Valdemar **Jensen**. Nakskov (Danimarca) 8-5-1859, Copenhagen 5-3-1925.
- Mark **Kac**. Krzemieniec (Polonia) 3-8-1914, California 26-10-1984.
- Karl Gustav Jacob **Jacobi**. Potsdam 10-12-1804, Berlino 18-2-1851.
- Pierre-Simon **Laplace**. Beaumont-en-Auge (Francia) 23-3-1749, Parigi 5-3-1827.
- Peter David **Lax**. Budapest 1-5-1926.
- Henri Léon **Lebesgue**. Beauvais (Francia) 28-6-1875, Parigi 26-7-1941.
- Marius Sophus **Lie**. Nordfjordeide (Norvegia) 17-12-1842, Oslo 18-2-1899.
- Joseph **Liouville**. Saint-Omer (Francia) 24-3-1809, Paris 8-9-1882.
- A. N. **Milgram**.
- John Willard **Milnor**. Orange (USA) 20-2-1931.
- Marc-Antoine **Parseval** des Chênes. Rosières-aux-Saline (Francia) 27-4-1755, Parigi 16-8-1836.
- Michel **Plancherel**. Bussy (Svizzera) 16-1-1885, Zurigo 4-3-1967.
- Siméon Denis **Poisson**. Pithiviers (Francia) 21-6-1781, Sceaux (Francia) 25-4-1840.
- Frigyes **Riesz**. Győr (Ungheria) 20-1-1880, Budapest 28-2-1956.
- Georg Friedrich Bernhard **Riemann**. Breselenz (Germania) 17-9-1826, Selasca (Italia) 20-6-1866.
- George Gabriel **Stokes**. Skreen (Irlanda) 13-8-1819, Cambridge 1-2-1903.
- Leonida **Tonelli**. Gallipoli 19-4-1885, Pisa 12-3-1946.
- Andrei Nikolaevich **Tychonoff**. Smolensk (Russia) 30-20-1906, 1993.
- David **Webb**.
- Karl Theodor Wilhelm **Weierstrass**. Ostenfelde (Germania) 31-10-1815, Berlino 19-2-1897.
- Hermann Klaus Hugo **Weyl**. Elmshorn (Germania) 9-11-1885, Zurigo 9-12-1955.
- Scott **Wolpert**.
- William Henry **Young**. Londra 20-10-1863, Losanna 7-7-1942.

+

+

Indice analitico

- Analiticità, 48
- Armoniche
 - analiticità, 48
- Bordo parabolico, 75
- Cilindro parabolico, 75
- Convoluzione, 11
 - continuità, 13
 - definizione, 11
 - regolarità, 14
- Densità
 - C_c^∞ , 18
 - funzioni passo, 7
 - funzioni semplici, 7
- Disuguaglianza
 - convessità, 5
 - Hölder, 4
 - triangolare, 5
- Energia
 - eq. della diffusione, 80
 - eq. di Laplace, 60
- Equazione
 - calore, 64
 - di continuità, 65
 - diffusione, 64
- Famiglie dense di funzioni, 6
- Fattore di Blaschke, 90
- Formula
 - Poisson, 56
- Funzione
 - analitica reale, 3
 - armonica, 21
 - armonica coniugata, 22
 - armonica in \mathbb{R}^n , 38
 - olomorfa associata, 23
 - passo, 7
 - semplice, 6
- Funzione armonica
 - valor medio, 38
- funzione armonica
 - valor medio, 24
- Funzione teta, 68
- Gabbia di Faraday, 42
- Integrale di convoluzione, 11
- Metodo
 - carica immagine, 58
 - variazionale, 61
- Mollificatori, 17
- Multiindice, 3
- Nucleo
 - Poisson per bolla in \mathbb{R}^2 , 32
 - eq. della diffusione sul segmento, 67
 - eq. diffusione in \mathbb{R}^n , 70
 - Poisson per bolla in \mathbb{R}^n , 57
 - Poisson per semispazio, 60
- Operatore
 - di shift, 8
 - di traslazione, 8
 - differenziale, 85
 - differenziale aggiunto, 86
- Parabolico
 - bordo, 75

+

+

+

+

- cilindro, 75
- Poisson
 - formula per bolla, 57
 - formula per semispazio, 59
- Prerequisiti, 3
- Principio del massimo, 25, 41
 - eq. diffusione, 75
- Principio di Dirichlet, 60, 61
- Problema
 - di Cauchy, 72
- Prodotto tensore, 19

- Regolarità
 - delle armoniche in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, 23
 - delle armoniche in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, 43

- Separabilità spazi L^p , 19
- Separazione delle variabili, 18
- Serie di Taylor, 3
- Soluzione
 - debole, 86
 - fondamentale eq. diffusione, 70
 - fondamentale per l'equazione della diffusione sul segmento, 67
 - forte, 86

- Teorema
 - Lax-Milgram, 86
 - Liouville per armoniche in \mathbb{R}^2 , 37
 - Liouville per armoniche in \mathbb{R}^n , 47

- Valor medio, 24, 38
- Variazionale
 - Metodo per eq. Laplace, 60

+

+