Funzioni di più variabili - Differenziabilità

MV 12/13

1] Per quali $\alpha > 0$ la funzione

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{1/4}}{(x^2+y^2)^\alpha} \log(1+x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{in } (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$?

2] Studiare il comportamento in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin\sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e calcolare la generica derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$, dove $\|\mathbf{v}\| = 1$.

3] Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2}\, y \log y}{y+|x|} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$.

4] Discutere continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (k\pi, 0) \\ \dfrac{xy}{y^2+|\sin x|} & \text{altrove} \end{cases}$$

in tutti i punti della forma $(k\pi, y_0)$, con $k \in \mathbb{Z}$ e $y_o \in \mathbb{R}$.

5] Per $\alpha > 0$ sia

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha\, y \log(x^4y^4)}{x^2+3y^2} & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

Discutere continuità e differenziabilità nei punti degli assi coordinati.

6] Studiare continuità e differenziabilità, in $\mathbb{R}^3$, di

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{(x-y)(x+y)-z^2}{|z|+\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y,z)\neq\mathbf{0}\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y,z)=\mathbf{0}\end{cases}$$

7] Studiare continuità e differenziabilità in $(0,0)$ di

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+y^3-x^4)}{4x^2-3xy+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{in } \mathbf{0}\end{cases}$$

8] Studiare, al variare di $\alpha,\beta\geq 0$, continuità e differenziabilità in $(0,0)$ di

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(1+x^2)(1+|y|)^\alpha-1}{(x^2+y^2)^\beta} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{in } \mathbf{0}\end{cases}$$

9] Sia $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, tale che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Allora $f(x,y)=?$

10] Sia $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2_{++}\right)$, tale che $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{y}$ e $f(x,1)=\sin x$. Allora $f(x,y)=?$

Soluzioni.

1] f_α differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha<5/8$.

2] f differenziabile in $(0,0)$, con $D_{\mathbf{v}}f(0,0)=0$ per ogni $\mathbf{v}$.

3] $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$; differenziabile nei quadranti aperti, e anche sull'asse y; nei punti $(x_0,0)$, $x_0\neq 0$, esiste solo $\partial f/\partial x$.

4] In $(0,0)$ f è continua, ed esistono solo le derivate parziali. Nei punti $(k\pi,0)$, con $k\neq 0$, f non è continua, ed esiste solo $\partial f/\partial x$. In $(0,y_0)$, $y_0\neq 0$, f è differenziabile. In $(k\pi,y_0)$, $k\neq 0$ e $y_0\neq 0$, f è continua ed esiste solo $\partial f/\partial y$.

5] In $(0,0)$ f_α è continua $\iff \alpha>1$, e differenziabile $\iff \alpha>2$. In $(x_0,0)$ f è continua, mai differenziabile. In $(0,y_0)$ f è sempre continua, ed è differenziabile $\iff \alpha>1$.

6] $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$; non è differenziabile nei punti dell'asse z; in $(x_0,y_0,0)$ è differenziabile solo se $y_0=\pm x_0\neq 0$.

7] f continua, ma non differenziabile, in $(0,0)$.

8] Per $\alpha=0$, f continua se $\beta<1$ e differenziabile se $\beta<1/2$; per $\alpha>0$, f continua se $\beta<1/2$, e mai differenziabile.

9] $f(x,y)=\arctan(x/y)+\varphi(y)$, con $\varphi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

10] $f(x,y)=\sin x+x^2\log y+\dfrac{y^2-1}{2}$