Funzioni di più variabili - Ottimizzazione

MV 12/13

1] Determinare gli estremi relativi ed assoluti di f in $\mathbb{R}^2$, per

$$f(x,y) = 4xy + x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 \ .$$

2] Determinare gli estremi relativi ed assoluti di f in $\mathbb{R}^2$, per

$$f(x,y) = x^2 - \sin y \ .$$

3] Determinare gli estremi relativi ed assoluti di f in $\mathbb{R}^2$, per

$$f(x,y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \ .$$

4] Determinare gli estremi relativi ed assoluti di f in $\mathbb{R}^2$, per

$$f(x,y) = xy\left(1 - x^2 - y^2\right)^2 \ .$$

5] Determinare la natura dei punti stazionari di f nel suo dominio, per

$$f(x,y) = \log\left(3 + x^2 y^3\right) \ .$$

6] Determinare la natura dei punti stazionari di f nel suo dominio, per

$$f(x,y) = \log\left(3 + x^2 y^3\right) \ .$$

7] Determinare gli estremi assoluti di f_a in $\mathbb{R}^2$, per

$$f_a(x,y) = \frac{1+ax^2}{1+x^2+y^2} \ , \quad a \in \mathbb{R}.$$

8] Determinare gli estremi relativi di f in $\mathbb{R}^3$, per

$$f(x,y,z) = (x+y)\exp\left[-\left(|x) + y^2 + |z|\right)\right] \ .$$

9] Determinare lo sviluppo di McLaurin, arrestato al V ordine, di

$$f(x,y) = \sin(x-y) + \cos\left(x^2+y\right) .$$

Soluzioni.

1] $\mathbf{0}$ sella, $\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right)$ minimi assoluti, $\sup = +\infty$.

2] $\sup = +\infty$; per $k \in \mathbb{Z}$: $\left(0, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ minimi assoluti e $\left(0, -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ selle.

3] $(1, -1)$ max assoluto; $\inf = -\sqrt{2}$.

4] $\inf = -\infty$, $\sup = +\infty$; $\mathbf{0}$ sella; $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ selle; gli altri punti di $\{x^2 + y^2 = 1\}$ sono max, o min, relativi; $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ max relativi, $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \mp\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ min relativi.

5] $(x_0, 0)$ tutte selle; $(0, y_0)$ min. rel. se $y_0 > 0$ e max. rel. se $y_0 < 0$.

6] $(0, y_0)$ con $y_0 > 1$ sono minimi assoluti; $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ sella.

7] $a < 0 : \inf f_a = a$, $\max f_a = 1$; $0 \leq a \leq 1 : \inf f_a = 0$, $\max f_a = 1$; $a > 1 : \inf f_a = 0$, $\sup f_a = a$.

8] $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ max. rel., $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ selle, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ min. rel.

9] $1 + x - y - \dfrac{1}{2}y^2 - \dfrac{1}{6}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3) - \dfrac{1}{24}(12x^4 - y^4) + \dfrac{1}{120}(x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5) + o\left((x^2 + y^2)^{5/2}\right)$.