Serie di funzioni

AnMat2-Fis, Marco Vignati, 17/18

Determinare l'insieme di convergenza puntuale, e discutere la convergenza uniforme, delle seguenti serie di funzioni.

1] $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \sin\left(\frac{x}{k^4}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$. **Sol.:** conv. punt. in $\mathbb{R}$; unif. se $|x| \leq M$.

2] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2 x} \quad (x \geq 0)$. **Sol.:** punt. in $(0, +\infty)$; unif in $[\varepsilon, +\infty)$.

3] $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{1+kx^2} \quad (x \geq 0)$. **Sol.:** punt. in $(0, +\infty)$; unif in $[\varepsilon, +\infty)$.

4] $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{k+\sin x}{k^2} \quad (x \in \mathbb{R})$. **Sol.:** unif. in $\mathbb{R}$.

5] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx}{e^{kx}} \quad (x \in \mathbb{R})$. **Sol.:** punt. in $[0, +\infty)$; unif in $[\varepsilon, +\infty)$.

6] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{x+k} \quad (x \geq 0)$. **Sol.:** punt. in $(0, +\infty)$; unif in $[\varepsilon, +\infty)$.

7] $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\,(ex)^k}{(k+1)^2} \quad (x \in \mathbb{R})$. **Sol.:** punt. in $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$; unif. in $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e} - \varepsilon]$.

8] $\sum_{k=0}^{+\infty} kxe^{k\left(x^2-x\right)} \quad x \in \mathbb{R}$. **Sol.:** punt. in $[0, 1)$; unif. in $[\varepsilon, 1-\delta]$.

Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di funzioni:

9] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k2^k}$ **Sol.:** $x \in [-2, 2)$.

10] $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k3^k \log k}$ **Sol.:** $x \in [-3, 3)$.

11] $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{ke^{kx}}{2k+1}}$ **Sol.:** $x \in (-\infty, 0)$.

12] $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3^{k/2}} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^k$ **Sol.:** $x \in \left(-2\frac{1+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}, 2\frac{\sqrt{3}-1}{4-\sqrt{3}}\right)$.

13] $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)^k \frac{1}{k}$ **Sol.:** $x \in (-\infty, -\log 2]$

14] La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R_1 = 1$, e la $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ha raggio $R_2 = 2$. Cosa si può dire dei raggi di convergenza delle serie:

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(2a_n + b_n)x^n \quad ; \quad ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{n}a_n + b_n)x^n \quad ; \quad iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + \sqrt{|b_n|})x^n \quad ?$$

Sol.: hanno tutte raggio $R = 1$.

15] La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $\rho \in (0, +\infty)$. Calcolare il raggio delle serie:

$$i)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 (3x)^n \quad ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^4 x^{3n} \ .$$

Sol.: sono, rispettivamente, ρ, $\rho^2/3$, $\rho^{4/3}$.

16] Data la serie di potenze $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\log(1 + e^{\alpha n})}{1 + n^\alpha}(x - e^\alpha)^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare per quali α la serie converge in tutti i punti dell'intervallo $(2, 3)$.

Sol.: $\alpha \in (-\infty, -\log \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\log 2, \log 3]$.

17] Calcolare insieme di convergenza e somma di $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(k+1)\, 3^k}{2^{k+2}} (x+1)^k$.

Sol.: $S(x) = \dfrac{1}{(3x+1)^2}$ per $x \in \left(-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.