Funzioni integrali #2

(Marco Vignati 16/17)

Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il dominio di

1] $F_a(x) := \displaystyle\int_a^x \frac{e^{1/t}}{t^2}\, dt$ **2]** $F_a(x) := \displaystyle\int_a^x \frac{\log(3+t)}{(t^3+5t^2+6t)\sqrt[3]{t-2}}\, dt$

Studiare, nel modo più esauriente possibile, le seguenti funzioni, e tracciarne un grafico qualitativo.

3] $F(x) := \displaystyle\int_{1/e}^x \frac{dt}{\sqrt[3]{\log t}\,\sqrt{2-t}}$ **4]** $F(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t}\sqrt{2+t}}$

5] $F(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{(t-2)\,\arctan\left(\frac{1}{t-1}\right)}{1+t^{5/3}}\, dt$ **6]** $F(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{t+1}{e^t-t}\, dt$

7] $F(x) = \displaystyle\int_2^x \log\left(\frac{1+2t^2}{t^2+5}\right) dt$

8] Calcolare lo sviluppo di MacLaurin, arrestato al III ordine, con resto secondo Peano,

di $F(x) := \displaystyle\int_0^{\ln(1-x)} te^{-t}\cos t\, dt$ **Sol.:** $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$

9] Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di

$$F(x) := \int_{2^x}^{x^2} e^{(t-2)^2} dt$$

nel punto di ascissa $x_0 = 2$. **Sol.** : $y = 4e^4(1-\ln 2)(x-2)$

10] Sia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$g(0) := 0\ , \quad g(x) := \frac{\int_0^x t\, f(t)\ dt}{\int_0^x f(t)\ dt} \quad \text{se } x \neq 0\ .$$

Dimostrare che $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, e che g è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.