Cognome **Nome** **Matr.**

---

c.l. Fisica | **Analisi 2** | prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2017 | **1° Appello d'esame** | versione A

1A] *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in [0, +\infty)$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{|y|^{3\alpha}\sqrt[3]{x}}{(2x^2+y^2)^{\alpha+1}} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?
(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha > 5/3$ (b) $\alpha > 8/3$

2A] *(6 p.ti)* Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x$.

$$\text{Risolvere poi il P.C.} \quad \begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x \\ y(0) = \frac{5}{2} \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Risp. $\alpha e^x + \beta e^{3x} + x + 1 + \frac{1}{2}\cos x - \sin x$. Soluzione del P.C.: $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

3A] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{(e^{2\alpha x}+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \geq 1/2$.

4A] *(6 p.ti)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -e^{-3y} \cos x \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.
(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata.

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = \frac{1}{3}\log(e^{3\alpha} - 3\sin x)$ per ogni α. Il suo dominio è $\mathbb{R}$ se $e^{3\alpha} > 3$, altrimenti è $(-\arcsin(e^{3\alpha}/3) - \pi, \arcsin(e^{3\alpha}/3))$ quando $e^{3\alpha} \leq 3$, e non è in tal caso prolungabile perché ha asintoti verticali agli estremi.

5A] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^3 + \sqrt{|x|}}, \qquad \text{ed} \qquad g_n(x) = \cos(f_n(x)).$$

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.
(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della sequenza $\{g_n\}$.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La convergenza è uniforme su qualunque sottoinsieme limitato, ma non lo è su qualunque intervallo illimitato I (poiché in tal caso $\|f_n\|_{\infty,I} \geq \lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = +\infty$, o, se si preferisce, perché non è valida la conclusione del teorema del doppio limite).
Per la continuità della funzione coseno e per il fatto che $\cos(0) = 1$ anche g_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$, ma alla funzione che vale identicamente 1. La limitatezza di $-\sin(x) = \cos'(x)$ (ed il teorema di Lagrange) garantiscono che anche la convergenza di g_n è uniforme sui limitati di $\mathbb{R}$. Anche la convergenza di g_n non è uniforme sugli intervalli illimitati I (poiché $\|g_n - 1\|_{\infty,I} \geq \limsup_{x\to\infty} |g_n(x) - 1| = 2$, o ancora, perché non è valida la conclusione del teorema del doppio limite).

Cognome	Nome	Matr.

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Vignati
20 Giugno 2017	**1° Appello d'esame**	versione B

1B] *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in [0, +\infty)$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{|y|^{3\alpha}\sqrt[3]{x}}{(x^2+3y^2)^{\alpha+1}} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?
(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha > 5/3$ (b) $\alpha > 8/3$

2B] *(6 p.ti)* Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x$.

Risolvere poi il P.C. $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = -5 \end{cases}$

Risp. $\alpha e^x + \beta e^{3x} + x + 1 + \frac{1}{2}\cos x - \sin x$. Soluzione del P.C.: $\alpha = 1$, $\beta = -2$.

3B] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x + 2}{(e^{3\alpha x} + 5)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \geq 1/3$.

4B] *(6 p.ti)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -e^{-2y}\cos x \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata.

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = \frac{1}{2}\log(e^{2\alpha} - 2\sin x)$ per ogni α. Il suo dominio è $\mathbb{R}$ se $e^{2\alpha} > 2$, altrimenti è $(-\arcsin(e^{2\alpha}/2) - \pi, \arcsin(e^{2\alpha}/2))$ quando $e^{2\alpha} \leq 2$, e non è in tal caso prolungabile perché ha asintoti verticali agli estremi.

5B] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^3 + \sqrt{|x|}}, \qquad \text{ed} \qquad g_n(x) = \cos(f_n(x)).$$

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.

(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.

(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della sequenza $\{g_n\}$.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La convergenza è uniforme su qualunque sottoinsieme limitato, ma non lo è su qualunque intervallo illimitato I (poiché in tal caso $\|f_n\|_{\infty,I} \geq \lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = +\infty$, o, se si preferisce, perché non è valida la conclusione del teorema del doppio limite).
Per la continuità della funzione coseno e per il fatto che $\cos(0) = 1$ anche g_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$, ma alla funzione che vale identicamente 1. La limitatezza di $-\sin(x) = \cos'(x)$ (ed il teorema di Lagrange) garantiscono che anche la convergenza di g_n è uniforme sui limitati di $\mathbb{R}$. Anche la convergenza di g_n non è uniforme sugli intervalli illimitati I (poiché $\|g_n - 1\|_{\infty,I} \geq \limsup_{x\to\infty} |g_n(x) - 1| = 2$, o ancora, perché non è valida la conclusione del teorema del doppio limite).

Cognome	**Nome**	**Matr.**

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Vignati
20 Giugno 2017	**1° Appello d'esame**	versione C

1C] *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in [0, +\infty)$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{|y|^{3\alpha} \sqrt[3]{x}}{(4x^2+y^2)^{\alpha+1}} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?
(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha > 5/3$ (b) $\alpha > 8/3$

2C] *(6 p.ti)* Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x$.

Risolvere poi il P.C. $$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x \\ y(0) = \frac{3}{2} \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Risp. $\alpha e^x + \beta e^{3x} + x + 1 + \frac{1}{2}\cos x - \sin x$. Soluzione del P.C.: $\alpha = -2$, $\beta = 2$.

3C] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x + 3}{(e^{4\alpha x}+1)(x^2+4)} \,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \geq 1/4$.

4C] *(6 p.ti)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -e^{-4y}\cos x \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.
(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata.

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = \frac{1}{4}\log(e^{4\alpha} - 4\sin x)$ per ogni α. Il suo dominio è $\mathbb{R}$ se $e^{4\alpha} > 4$, altrimenti è $(-\arcsin(e^{4\alpha}/4) - \pi, \arcsin(e^{4\alpha}/4))$ quando $e^{4\alpha} \leq 4$, e non è in tal caso prolungabile perché ha asintoti verticali agli estremi.

5C] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^3 + \sqrt{|x|}}, \qquad \text{ed} \qquad g_n(x) = \cos(f_n(x)).$$

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.
(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della sequenza $\{g_n\}$.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La convergenza è uniforme su qualunque sottoinsieme limitato, ma non lo è su qualunque intervallo illimitato I (poiché in tal caso $\|f_n\|_{\infty,I} \geq \lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = +\infty$, o, se si preferisce, perché non è valida la conclusione del teorema del doppio limite).
Per la continuità della funzione coseno e per il fatto che $\cos(0) = 1$ anche g_n converge puntualmente su $\mathbb{R}$, ma alla funzione che vale identicamente 1. La limitatezza di $-\sin(x) = \cos'(x)$ (ed il teorema di Lagrange) garantiscono che anche la convergenza di g_n è uniforme sui limitati di $\mathbb{R}$. Anche la convergenza di g_n non è uniforme sugli intervalli illimitati I (poiché $\|g_n - 1\|_{\infty,I} \geq \limsup_{x\to\infty} |g_n(x) - 1| = 2$, o ancora, perché non è valida la conclusione del teorema del doppio limite).