Cognome	**Nome**	**Matr.**

c.l. Fisica | **Analisi 2** | prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2018 | **1° Appello d'esame** | versione A

1A] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{\sin(4x^2)\sin(5y)}{(5x^2+4y^2)^\alpha} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?
(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha < 3/2$ (b) $\alpha < 1$

2A] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{2-\alpha}}{|e^{1-x} - x^2|^{3\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \in (1/6, 3/4)$.

3A] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) := \frac{n+|x|}{n^3+|x|^3}, \qquad \text{ed} \qquad \Sigma := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nota: A seconda del metodo di soluzione scelto, potrebbe risultare utile sapere che l'unica soluzione positiva di $2u^3+3u^2-1=0$ è $u=1/2$.
(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.
(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie Σ.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La funzione f_n è pari, con $f_n(0) = 1/n^2$, $f_n(\infty) = 0$ ed $f_n(x) \geq 0$ per ogni x. Inoltre f_n ha un massimo in $x = \pm un$, dove $u > 0$ risolve l'equazione indicata (e quindi è $1/2$). Ne segue che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1+u}{1+u^3}\frac{1}{n^2} = \frac{4/3}{n^2}$. La convergenza è quindi uniforme in $\mathbb{R}$. Dal test di Weierstrass segue che anche la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

4A]* *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia L_α l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$L_\alpha\colon\ y \mapsto y'' + (\alpha+1)y' + 2(\alpha-1)y.$$

(a) Determinare la soluzione generale di $L_\alpha y = 0$.
(b) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 0$ è limitata in $[1,+\infty)$?
(c) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 1$ è limitata in $[1,+\infty)$?

Risp. $\langle e^{-2x}, e^{(1-\alpha)x}\rangle_\mathbb{R}$ se $\alpha \neq 3$, altrimenti $\langle e^{-2x}, xe^{-2x}\rangle_\mathbb{R}$, per $\alpha \geq 1$, per $\alpha > 1$.

5A]*(8 p.ti)* Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 4\sqrt{y}\log x \\ y(1) = 4\alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che quando $\alpha > 0$ esso ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata. Nel caso $\alpha = 0$ la soluzione locale è unica?

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = 4(\sqrt{\alpha} + x\log x - x + 1)^2$ se $\alpha > 0$, che di fatto è soluzione su $(0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ oltre alla funzione $\phi_0(x) = 4(x\log x - x + 1)^2$ vi è la soluzione $\phi(x) = 0$ per ogni x. Localmente le due soluzioni generano 4 soluzioni locali del PC. In realtà il caso $\alpha = 0$ ammette infinite soluzioni locali, ottenute ad esempio prendendo un qualunque $x_0 > 1$ e ponendo $\phi(x) = 4(x\log x - x - x_0\log x_0 + x_0)^2$ per $x > x_0$ ed $\phi(x) = 0$ per $x \leq x_0$.

Cognome	**Nome**	**Matr.**

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Vignati
20 Giugno 2018	1° **Appello d'esame**	versione B

1B] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{\sin(x)\sin(3y^2)}{(3x^2+y^2)^\alpha} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?
(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha < 3/2$ (b) $\alpha < 1$

2B] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{3-\alpha}}{|e^{1-x} - x^2|^{2\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \in (1/4, 4/3)$.

3B] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) := \frac{5n + 2|x|}{n^3 + 2|x|^3}, \qquad \text{ed} \qquad \Sigma := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nota: A seconda del metodo di soluzione scelto, potrebbe risultare utile sapere che l'unica soluzione positiva di $4u^3 + 15u^2 - 1 = 0$ è $u = 1/4$.

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.
(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie Σ.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La funzione f_n è pari, con $f_n(0) = 1/n^2$, $f_n(\infty) = 0$ ed $f_n(x) \geq 0$ per ogni x. Inoltre f_n ha un massimo in $x = \pm un$, dove $u > 0$ risolve l'equazione indicata (e quindi è 1). Ne segue che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{5+2u}{1+2u^3}\frac{1}{n^2} = \frac{11}{3n^2}$. La convergenza è quindi uniforme in $\mathbb{R}$. Dal test di Weierstrass segue che anche la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

4B]* *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia L_α l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$L_\alpha\colon\ y \mapsto y'' + (\alpha+1)y' + 3(\alpha-2)y.$$

(a) Determinare la soluzione generale di $L_\alpha y = 0$.
(b) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 0$ è limitata in $[1, +\infty)$?
(c) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 1$ è limitata in $[1, +\infty)$?

Risp. $\langle e^{-3x}, e^{(2-\alpha)x}\rangle_{\mathbb{R}}$, se $\alpha \neq 5$, altrimenti $\langle e^{-3x}, xe^{-3x}\rangle_{\mathbb{R}}$; per $\alpha \geq 2$, per $\alpha > 2$.

5B]*(8 p.ti)* Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}\log x \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che quando $\alpha > 0$ esso ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata. Nel caso $\alpha = 0$ la soluzione locale è unica?

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = (\sqrt{\alpha} + x\log x - x + 1)^2$ se $\alpha > 0$, che di fatto è soluzione su $(0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ oltre alla funzione $\phi_0(x) = (x\log x - x + 1)^2$ vi è la soluzione $\phi(x) = 0$ per ogni x. Localmente le due soluzioni generano 4 soluzioni locali del PC. In realtà il caso $\alpha = 0$ ammette infinite soluzioni locali, ottenute ad esempio prendendo un qualunque $x_0 > 1$ e ponendo $\phi(x) = (x\log x - x - x_0\log x_0 + x_0)^2$ per $x > x_0$ ed $\phi(x) = 0$ per $x \le x_0$.

Cognome **Nome** **Matr.**

---

c.l. Fisica | **Analisi 2** | prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2018 | 1° **Appello d'esame** | versione C

1C] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{\sin(2x^2)\sin(5y)}{(5x^2+2y^2)^\alpha} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?
(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha < 3/2$ (b) $\alpha < 1$

2C] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{2-3\alpha}}{|e^{1-x}-x^2|^{2\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \in (1/4, 3/5)$.

3C] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) := \frac{n+9|x|}{n^3+9|x|^3}, \qquad \text{ed} \qquad \Sigma := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nota: A seconda del metodo di soluzione scelto, potrebbe risultare utile sapere che l'unica soluzione positiva di $18u^3+3u^2-1=0$ è $u=1/3$.
(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.
(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie Σ.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La funzione f_n è pari, con $f_n(0)=1/n^2$, $f_n(\infty)=0$ ed $f_n(x)\geq 0$ per ogni x. Inoltre f_n ha un massimo in $x=\pm un$, dove $u>0$ risolve l'equazione indicata (e quindi è $1/3$). Ne segue che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1+9u}{1+9u^3}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{n^2}$. La convergenza è quindi uniforme in $\mathbb{R}$. Dal test di Weierstrass segue che anche la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

4C]* *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia L_α l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$L_\alpha\colon\ y \mapsto y'' + \alpha y' + 3(\alpha-3)y.$$

(a) Determinare la soluzione generale di $L_\alpha y = 0$.
(b) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 0$ è limitata in $[1,+\infty)$?
(c) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 1$ è limitata in $[1,+\infty)$?

Risp. $\langle e^{-3x}, e^{(3-\alpha)x}\rangle_{\mathbb{R}}$ se $\alpha \neq 6$, altrimenti $\langle e^{-3x}, xe^{-3x}\rangle_{\mathbb{R}}$; per $\alpha \geq 3$, per $\alpha > 3$.

5C]*(8 p.ti)* Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 6\sqrt{y}\log x \\ y(1) = 9\alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che quando $\alpha > 0$ esso ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata. Nel caso $\alpha = 0$ la soluzione locale è unica?

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = 9(\sqrt{\alpha} + x\log x - x + 1)^2$ se $\alpha > 0$, che di fatto è soluzione su $(0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ oltre alla funzione $\phi_0(x) = 9(x\log x - x + 1)^2$ vi è la soluzione $\phi(x) = 0$ per ogni x. Localmente le due soluzioni generano 4 soluzioni locali del PC. In realtà il caso $\alpha = 0$ ammette infinite soluzioni locali, ottenute ad esempio prendendo un qualunque $x_0 > 1$ e ponendo $\phi(x) = 9(x\log x - x - x_0\log x_0 + x_0)^2$ per $x > x_0$ ed $\phi(x) = 0$ per $x \leq x_0$.

Cognome	Nome	Matr.

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Vignati
20 Giugno 2018	1° **Appello d'esame**	versione D

1D] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{\sin(4x^2)\sin(5y)}{(5x^2+4y^2)^\alpha} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?
(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha < 3/2$ (b) $\alpha < 1$

2D] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{3-2\alpha}}{|e^{1-x}-x^2|^{3\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \in (1/6, 4/5)$.

3D] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) := \frac{n+|x|}{n^3+|x|^3}, \qquad \text{ed} \qquad \Sigma := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nota: A seconda del metodo di soluzione scelto, potrebbe risultare utile sapere che l'unica soluzione positiva di $2u^3+3u^2-1=0$ è $u=1/2$.

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.
(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie Σ.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La funzione f_n è pari, con $f_n(0) = 1/n^2$, $f_n(\infty) = 0$ ed $f_n(x) \geq 0$ per ogni x. Inoltre f_n ha un massimo in $x = \pm un$, dove $u > 0$ risolve l'equazione indicata (e quindi è $1/2$). Ne segue che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1+u}{1+u^3}\frac{1}{n^2} = \frac{4/3}{n^2}$. La convergenza è quindi uniforme in $\mathbb{R}$. Dal test di Weierstrass segue che anche la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

4D]* *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia L_α l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$L_\alpha\colon\ y \mapsto y'' + (\alpha-3)y' + (\alpha-4)y.$$

(a) Determinare la soluzione generale di $L_\alpha y = 0$.
(b) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 0$ è limitata in $[1,+\infty)$?
(c) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 1$ è limitata in $[1,+\infty)$?

Risp. $\langle e^{-x}, e^{(4-\alpha)x}\rangle_\mathbb{R}$ se $\alpha \neq 5$, altrimenti $\langle e^{-x}, xe^{-x}\rangle_\mathbb{R}$; per $\alpha \geq 4$, per $\alpha > 4$.

5D]*(8 p.ti)* Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}\log x \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che quando $\alpha > 0$ esso ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata. Nel caso $\alpha = 0$ la soluzione locale è unica?

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = (\sqrt{\alpha} + x\log x - x + 1)^2$ se $\alpha > 0$, che di fatto è soluzione su $(0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ oltre alla funzione $\phi_0(x) = (x\log x - x + 1)^2$ vi è la soluzione $\phi(x) = 0$ per ogni x. Localmente le due soluzioni generano 4 soluzioni locali del PC. In realtà il caso $\alpha = 0$ ammette infinite soluzioni locali, ottenute ad esempio prendendo un qualunque $x_0 > 1$ e ponendo $\phi(x) = (x\log x - x - x_0\log x_0 + x_0)^2$ per $x > x_0$ ed $\phi(x) = 0$ per $x \leq x_0$.

Cognome	Nome	Matr.

c.l. Fisica — **Analisi 2** — prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2018 — **1° Appello d'esame** — versione E

1E] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{2-\alpha}}{|e^{1-x} - x^2|^{3\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \in (1/6, 3/4)$.

2E] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) := \frac{n + |x|}{n^3 + |x|^3}, \qquad \text{ed} \qquad \Sigma := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nota: A seconda del metodo di soluzione scelto, potrebbe risultare utile sapere che l'unica soluzione positiva di $2u^3 + 3u^2 - 1 = 0$ è $u = 1/2$.

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.

(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.

(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie Σ.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La funzione f_n è pari, con $f_n(0) = 1/n^2$, $f_n(\infty) = 0$ ed $f_n(x) \geq 0$ per ogni x. Inoltre f_n ha un massimo in $x = \pm un$, dove $u > 0$ risolve l'equazione indicata (e quindi è $1/2$). Ne segue che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1+u}{1+u^3}\frac{1}{n^2} = \frac{4/3}{n^2}$. La convergenza è quindi uniforme in $\mathbb{R}$. Dal test di Weierstrass segue che anche la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

3E] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x, y) := \frac{\sin(4x^2)\sin(5y)}{(5x^2 + 4y^2)^\alpha} \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0, 0)$?

(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0, 0)$?

Risp. (a) $\alpha < 3/2$ (b) $\alpha < 1$

4E]* *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia L_α l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$L_\alpha\colon\; y \mapsto y'' + (\alpha + 1)y' + 2(\alpha - 1)y.$$

(a) Determinare la soluzione generale di $L_\alpha y = 0$.

(b) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 0$ è limitata in $[1, +\infty)$?

(c) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 1$ è limitata in $[1, +\infty)$?

Risp. $\langle e^{-2x}, e^{(1-\alpha)x}\rangle_{\mathbb{R}}$ se $\alpha \neq 3$, altrimenti $\langle e^{-2x}, xe^{-2x}\rangle_{\mathbb{R}}$, per $\alpha \geq 1$, per $\alpha > 1$.

5E]*(8 p.ti)* Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 4\sqrt{y}\log x \\ y(1) = 4\alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che quando $\alpha > 0$ esso ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata. Nel caso $\alpha = 0$ la soluzione locale è unica?

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = 4(\sqrt{\alpha} + x\log x - x + 1)^2$ se $\alpha > 0$, che di fatto è soluzione su $(0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ oltre alla funzione $\phi_0(x) = 4(x\log x - x + 1)^2$ vi è la soluzione $\phi(x) = 0$ per ogni x. Localmente le due soluzioni generano 4 soluzioni locali del PC. In realtà il caso $\alpha = 0$ ammette infinite soluzioni locali, ottenute ad esempio prendendo un qualunque $x_0 > 1$ e ponendo $\phi(x) = 4(x\log x - x - x_0\log x_0 + x_0)^2$ per $x > x_0$ ed $\phi(x) = 0$ per $x \leq x_0$.

Cognome	**Nome**	**Matr.**

c.l. Fisica — **Analisi 2** — prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2018 — **1° Appello d'esame** — versione F

1F] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{3-\alpha}}{|e^{1-x} - x^2|^{2\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \in (1/4, 4/3)$.

2F] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) := \frac{5n + 2|x|}{n^3 + 2|x|^3}, \qquad \text{ed} \qquad \Sigma := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nota: A seconda del metodo di soluzione scelto, potrebbe risultare utile sapere che l'unica soluzione positiva di $4u^3 + 15u^2 - 1 = 0$ è $u = 1/4$.

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.

(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.

(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie Σ.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La funzione f_n è pari, con $f_n(0) = 1/n^2$, $f_n(\infty) = 0$ ed $f_n(x) \geq 0$ per ogni x. Inoltre f_n ha un massimo in $x = \pm un$, dove $u > 0$ risolve l'equazione indicata (e quindi è 1). Ne segue che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{5+2u}{1+2u^3}\frac{1}{n^2} = \frac{11}{3n^2}$. La convergenza è quindi uniforme in $\mathbb{R}$. Dal test di Weierstrass segue che anche la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

3F] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{\sin(x)\sin(3y^2)}{(3x^2 + y^2)^\alpha} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?

(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha < 3/2$ (b) $\alpha < 1$

4F] * *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia L_α l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$L_\alpha\colon\ y \mapsto y'' + (\alpha + 1)y' + 3(\alpha - 2)y.$$

(a) Determinare la soluzione generale di $L_\alpha y = 0$.

(b) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 0$ è limitata in $[1, +\infty)$?

(c) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 1$ è limitata in $[1, +\infty)$?

Risp. $\langle e^{-3x}, e^{(2-\alpha)x}\rangle_{\mathbb{R}}$, se $\alpha \neq 5$, altrimenti $\langle e^{-3x}, xe^{-3x}\rangle_{\mathbb{R}}$; per $\alpha \geq 2$, per $\alpha > 2$.

5F]*(8 p.ti)* Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}\log x \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che quando $\alpha > 0$ esso ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata. Nel caso $\alpha = 0$ la soluzione locale è unica?

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = (\sqrt{\alpha} + x\log x - x + 1)^2$ se $\alpha > 0$, che di fatto è soluzione su $(0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ oltre alla funzione $\phi_0(x) = (x\log x - x + 1)^2$ vi è la soluzione $\phi(x) = 0$ per ogni x. Localmente le due soluzioni generano 4 soluzioni locali del PC. In realtà il caso $\alpha = 0$ ammette infinite soluzioni locali, ottenute ad esempio prendendo un qualunque $x_0 > 1$ e ponendo $\phi(x) = (x\log x - x - x_0\log x_0 + x_0)^2$ per $x > x_0$ ed $\phi(x) = 0$ per $x \leq x_0$.

Cognome	**Nome**	**Matr.**

c.l. Fisica — **Analisi 2** — prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2018 — **1° Appello d'esame** — versione G

1G] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{2-3\alpha}}{|e^{1-x} - x^2|^{2\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \in (1/4, 3/5)$.

2G] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) := \frac{n + 9|x|}{n^3 + 9|x|^3}, \qquad \text{ed} \qquad \Sigma := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nota: A seconda del metodo di soluzione scelto, potrebbe risultare utile sapere che l'unica soluzione positiva di $18u^3 + 3u^2 - 1 = 0$ è $u = 1/3$.

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.
(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie Σ.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La funzione f_n è pari, con $f_n(0) = 1/n^2$, $f_n(\infty) = 0$ ed $f_n(x) \geq 0$ per ogni x. Inoltre f_n ha un massimo in $x = \pm un$, dove $u > 0$ risolve l'equazione indicata (e quindi è 1/3). Ne segue che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1+9u}{1+9u^3}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{n^2}$. La convergenza è quindi uniforme in $\mathbb{R}$. Dal test di Weierstrass segue che anche la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

3G] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \frac{\sin(2x^2)\sin(5y)}{(5x^2 + 2y^2)^\alpha} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0,0)$?
(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha < 3/2$ (b) $\alpha < 1$

4G]* *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia L_α l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$L_\alpha\colon\ y \mapsto y'' + \alpha y' + 3(\alpha - 3)y.$$

(a) Determinare la soluzione generale di $L_\alpha y = 0$.
(b) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 0$ è limitata in $[1, +\infty)$?
(c) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 1$ è limitata in $[1, +\infty)$?

Risp. $\langle e^{-3x}, e^{(3-\alpha)x}\rangle_{\mathbb{R}}$ se $\alpha \neq 6$, altrimenti $\langle e^{-3x}, xe^{-3x}\rangle_{\mathbb{R}}$; per $\alpha \geq 3$, per $\alpha > 3$.

5G]*(8 p.ti)* Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 6\sqrt{y}\log x \\ y(1) = 9\alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che quando $\alpha > 0$ esso ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata. Nel caso $\alpha = 0$ la soluzione locale è unica?

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = 9(\sqrt{\alpha} + x\log x - x + 1)^2$ se $\alpha > 0$, che di fatto è soluzione su $(0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ oltre alla funzione $\phi_0(x) = 9(x\log x - x + 1)^2$ vi è la soluzione $\phi(x) = 0$ per ogni x. Localmente le due soluzioni generano 4 soluzioni locali del PC. In realtà il caso $\alpha = 0$ ammette infinite soluzioni locali, ottenute ad esempio prendendo un qualunque $x_0 > 1$ e ponendo $\phi(x) = 9(x\log x - x - x_0\log x_0 + x_0)^2$ per $x > x_0$ ed $\phi(x) = 0$ per $x \leq x_0$.

Cognome	Nome	Matr.

c.l. Fisica — **Analisi 2** — prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2018 — **1° Appello d'esame** — versione H

1H] *(4 p.ti)* Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^{3-2\alpha}}{|e^{1-x} - x^2|^{3\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{converge?}$$

Risp. $\alpha \in (1/6, 4/5)$.

2H] *(8 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, siano

$$f_n(x) := \frac{n + |x|}{n^3 + |x|^3}, \qquad \text{ed} \qquad \Sigma := \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nota: A seconda del metodo di soluzione scelto, potrebbe risultare utile sapere che l'unica soluzione positiva di $2u^3 + 3u^2 - 1 = 0$ è $u = 1/2$.

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.

(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.

(c) Analogamente, discutere convergenza puntuale ed uniforme della serie Σ.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La funzione f_n è pari, con $f_n(0) = 1/n^2$, $f_n(\infty) = 0$ ed $f_n(x) \geq 0$ per ogni x. Inoltre f_n ha un massimo in $x = \pm un$, dove $u > 0$ risolve l'equazione indicata (e quindi è $1/2$). Ne segue che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1+u}{1+u^3}\frac{1}{n^2} = \frac{4/3}{n^2}$. La convergenza è quindi uniforme in $\mathbb{R}$. Dal test di Weierstrass segue che anche la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

3H] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x, y) := \frac{\sin(4x^2)\sin(5y)}{(5x^2 + 4y^2)^\alpha} \qquad (x, y) \neq (0, 0)$$

(a) Per quali α la funzione ammette un prolungamento continuo in $(0, 0)$?

(b) Per quali α il prolungamento è differenziabile in $(0, 0)$?

Risp. (a) $\alpha < 3/2$ (b) $\alpha < 1$

4H]* *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia L_α l'operatore differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$L_\alpha\colon\ y \mapsto y'' + (\alpha - 3)y' + (\alpha - 4)y.$$

(a) Determinare la soluzione generale di $L_\alpha y = 0$.

(b) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 0$ è limitata in $[1, +\infty)$?

(c) Per quali α **ogni** soluzione di $L_\alpha y = 1$ è limitata in $[1, +\infty)$?

Risp. $\langle e^{-x}, e^{(4-\alpha)x}\rangle_\mathbb{R}$ se $\alpha \neq 5$, altrimenti $\langle e^{-x}, xe^{-x}\rangle_\mathbb{R}$; per $\alpha \geq 4$, per $\alpha > 4$.

5H]*(8 p.ti)* Per ogni $\alpha \in [0, +\infty)$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}\log x \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che quando $\alpha > 0$ esso ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata. Nel caso $\alpha = 0$ la soluzione locale è unica?

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = (\sqrt{\alpha} + x\log x - x + 1)^2$ se $\alpha > 0$, che di fatto è soluzione su $(0, +\infty)$. Se $\alpha = 0$ oltre alla funzione $\phi_0(x) = (x\log x - x + 1)^2$ vi è la soluzione $\phi(x) = 0$ per ogni x. Localmente le due soluzioni generano 4 soluzioni locali del PC. In realtà il caso $\alpha = 0$ ammette infinite soluzioni locali, ottenute ad esempio prendendo un qualunque $x_0 > 1$ e ponendo $\phi(x) = (x\log x - x - x_0\log x_0 + x_0)^2$ per $x > x_0$ ed $\phi(x) = 0$ per $x \leq x_0$.