c.l. tr. in Fisica (F63) proff. G.Molteni, M.Vignati

ANALISI MATEMATICA 2

5/07/2018 prova scritta #2 vers. A

Durata: **120** minuti. Va fornita giustificazione del procedimento seguito.

1A] *(4 p.)* Sia $h(x,y) = g(2x+y, x-3y, y-3x)$, dove $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ e soddisfa

$$g(1,-3,1) = -2 \quad ; \quad \nabla g(1,-3,1) = (2;1;3)$$

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $z = h(x,y)$ nel punto $(0,1,h(0,1))$.

Risp. $z =$

2A] *(5 p.)* La soluzione locale del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{x^2}{2y^3} \\ y(1) = \sqrt{2} \end{cases}$ è:

Risp. $y(x) =$

3A] *(8 p.)* Si consideri, per $\beta \in \mathbb{R}$, la serie di potenze della variabile $x \in \mathbb{R}$

$$(*_\beta) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\beta\, \pi^{n+1} - (n+1)\, 2^{n-1}\right] x^n$$

i) Determinarne il raggio di convergenza $\rho(\beta)$.

ii) Per quali β la funzione somma S_β ha un punto estremante con ascissa $x = 0$? Di che natura (max/min)?

iii) Calcolare esplicitamente la funzione somma S_β.

4A] *(7 p.)* Determinare l'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log\left(1 + \frac{t-2}{3}\right)}{(t+2)\left[e^{t^2-5t+6} - 1\right]} dt$$

5A] *(6 p.)* Stabilire per quali valori $A \in \mathbb{R}$ la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} + 3x^2 \cos x \\ y(\pi) = A \end{cases}$$

assume valori positivi per ogni $x \in (0, +\infty)$.

c.l. tr. in Fisica (F63) proff. G.Molteni, M.Vignati

ANALISI MATEMATICA 2

5/07/2018 prova scritta #2 vers. B

Durata: **120** minuti. Va fornita giustificazione del procedimento seguito.

1B] *(4 p.)* Sia $h(x,y) = g(2x+y, x-3y, y-3x)$, dove $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ e soddisfa

$$g(2,1,-3) = 5 \quad ; \quad \nabla g(2,1,-3) = (1;3;2)$$

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $z = h(x,y)$ nel punto $(1,0,h(1,0))$.

Risp. $z =$

2B] *(5 p.)* La soluzione locale del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{x^2}{y^3} \\ y(1) = 2 \end{cases}$ è:

Risp. $y(x) =$

3B] *(8 p.)* Si consideri, per $\beta \in \mathbb{R}$, la serie di potenze della variabile $x \in \mathbb{R}$

$$(*_\beta) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\beta\, 4^{n+1} - (n+1)\,\pi^{n-1}\right] x^n$$

i) Determinarne il raggio di convergenza $\rho(\beta)$.

ii) Per quali β la funzione somma S_β ha un punto estremante con ascissa $x = 0$? Di che natura (max/min)?

iii) Calcolare esplicitamente la funzione somma S_β.

4B] *(7 p.)* Determinare l'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log\left(1 + \frac{t-1}{3}\right)}{(t+3)\left[e^{t^2-3t+2} - 1\right]} dt$$

5B] *(6 p.)* Stabilire per quali valori $B \in \mathbb{R}$ la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} + x^2 \cos x \\ y(\pi) = B \end{cases}$$

assume valori positivi per ogni $x \in (0, +\infty)$.

c.l. tr. in Fisica (F63) proff. G.Molteni, M.Vignati

ANALISI MATEMATICA 2

5/07/2018 prova scritta #2 vers. C

Durata: **120** minuti. Va fornita giustificazione del procedimento seguito.

1C] *(4 p.)* Sia $h(x,y) = g(2x+y, x-3y, y-3x)$, dove $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ e soddisfa

$$g(1,-3,1) = 3 \quad ; \quad \nabla g(1,-3,1) = (3;2;1)$$

Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $z = h(x,y)$ nel punto $(0,1,h(0,1))$.

Risp. $z =$

2C] *(5 p.)* La soluzione locale del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{x^2}{4y^3} \\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases}$ è:

Risp. $y(x) =$

3C] *(8 p.)* Si consideri, per $\beta \in \mathbb{R}$, la serie di potenze della variabile $x \in \mathbb{R}$

$$(*_\beta) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\beta\, 5^{n+1} - (n+1)\, 3^{n-1}\right] x^n$$

i) Determinarne il raggio di convergenza $\rho(\beta)$.

ii) Per quali β la funzione somma S_β ha un punto estremante con ascissa $x = 0$? Di che natura (max/min)?

iii) Calcolare esplicitamente la funzione somma S_β.

4C] *(7 p.)* Determinare l'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log\left(1 + \frac{t-1}{2}\right)}{(t+2)\left[e^{t^2-5t+4} - 1\right]} dt$$

5C] *(6 p.)* Stabilire per quali valori $C \in \mathbb{R}$ la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} + 4x^2 \cos x \\ y(\pi) = C \end{cases}$$

assume valori positivi per ogni $x \in (0, +\infty)$.

ANALISI MATEMATICA 2

5/07/2018 prova scritta #2

1A] $z = 2y - 4x - 4$; **1B]** $z = 6 - x - 6y$; **1C]** $z = 5x - 2y + 5$

2A] $y(x) = \sqrt[4]{2}\,\sqrt{x}\,\sqrt[4]{3-x}$; **2B]** $y(x) = \sqrt{2x}\,\sqrt[4]{5-x}$;
2C] $y(x) = \sqrt{x}\,\sqrt[4]{10-x}$

3A] $\rho(\beta) = \begin{cases} 1/\pi & \text{se } \beta \neq 0 \\ 1/2 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$. Se $\beta = \dfrac{2}{\pi^2}$, $x = 0$ è minimo.

$$S_\beta(x) = \frac{\pi\beta}{1-\pi x} - \frac{1}{2(1-2x)^2}.$$

3B] $\rho(\beta) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 1/\pi & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$. Se $\beta = \dfrac{1}{8}$, $x = 0$ è massimo.

$$S_\beta(x) = \frac{4\beta}{1-4x} - \frac{1}{\pi(1-\pi x)^2}.$$

3C] $\rho(\beta) = \begin{cases} 1/5 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 1/3 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$. Se $\beta = \dfrac{2}{25}$, $x = 0$ è minimo.

$$S_\beta(x) = \frac{5\beta}{1-5x} - \frac{1}{3(1-3x)^2}.$$

4A] $x \in [-1, 3)$; **4B]** $x \in [-2, 2)$; **4C]** $x \in [-1, 4)$

5A] $y(x) = \dfrac{x^2}{\pi^2}\left[A + 3\pi^2 \sin x\right]$; $A > 3\pi^2$. **5B]** $y(x) = \dfrac{x^2}{\pi^2}\left[B + \pi^2 \sin x\right]$; $B > \pi^2$.

5C] $y(x) = \dfrac{x^2}{\pi^2}\left[C + 4\pi^2 \sin x\right]$; $C > 4\pi^2$.