Cognome	**Nome**	**Matr.**

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Peloso
13 Luglio 2016	3° **Appello d'esame**	versione A

1a] *(4 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\log(1+|x^3y|)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a)Per quali α la funzione è continua in $(0,0)$?
(b)Per quali α la funzione è derivabile in $(0,0)$?
(c)Per quali α la funzione è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha < 2$ (b) $\alpha \leq \frac{3}{2}$ (c) $\alpha < \frac{3}{2}$

2a] *(6 p.ti)* Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si considerino l'equazione differenziale

$$y''' - y'' - y' + y = 2\cos x + 2\sin x \qquad \text{ed il } PC_\alpha\colon \quad \begin{cases} y''' - y'' - y' + y = 2\cos x + 2\sin x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a)Determinare esplicitamente tutte le soluzioni della sola equazione differenziale.
(b)Determinare esplicitamente la soluzione di PC_α.
(c)Per quali valori di α la soluzione di PC_α è di tipo pari?

Risp. sol. della equazione: $(A+Bx)e^x + Ce^{-x} + \cos x$, con $A,B,C \in \mathbb{R}$. La soluzione di PC_α è $(\frac{5-\alpha}{4} + \frac{\alpha-1}{2}x)e^x + \frac{3+\alpha}{4}e^{-x} + \cos x = 2\cosh x + \cos x + \frac{\alpha-1}{2}(xe^x - \sinh x)$. La soluzione è pari se e solo se $B = 0$ ed $A = C$ ovvero $\alpha = 1$.

3a] *(6 p.ti)* Sia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^3n}}{x^2+n^2}, \qquad x \geq 0.$$

(a)Determinare il dominio di f.
(b)In quale/i insieme/i la serie converge uniformemente?
(c)Determinare il dominio di continuità di f.

Risp. La serie converge in $[0,+\infty)$ che quindi è il dominio di f. La convergenza non è uniforme in $[0,+\infty)$ (perché $\sup_{x\geq 0} \frac{\sqrt{1+x^3n}}{x^2+n^2} \geq \frac{\sqrt{1+n^3n}}{n^2+n^2} \geq \frac{\sqrt{n^3n}}{n^2+n^2} = \frac{1}{2}$), ma per ogni $L > 0$ è uniforme in $[0,L]$. La funzione f è quindi continua in $[0,+\infty)$.

4a] *(4 p.ti)* Data la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4+3\sqrt{n}}}{ne^{3n}}\, x^n,$$

(a)determinarne il raggio di convergenza;
(b)determinarne il dominio di convergenza.

Risp. Il raggio è e^3 ed il dominio di convergenza è $[-e^3, e^3)$.

5a] *(6 p.ti)* Per ogni $\alpha > 0$ si consideri il Problema di Cauchy

$$PC_\alpha: \qquad \begin{cases} y' = 4y - 4y^{1/4} \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a)Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.
(b)Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione.
(c)È possibile prolungare ϕ_α ad una soluzione di PC_α su $\mathbb{R}$? In quanti modi?

Risp. Eq. Bernoulli con esponente 1/4 (è anche separabile, ma conviene vederla come Bernoulli). La soluzione locale $\phi_\alpha(x) = (1 + (\alpha^{3/4} - 1)e^{3x})^{4/3}$ per $\alpha > 0$, e tra le soluzioni di PC_α con $\alpha = 0$ v'è la $y \equiv 0$. Il dominio di ϕ_α è $\mathbb{R}$ quando $\alpha \geq 1$, ed $(-\infty, -\frac{1}{3}\log(1 - \alpha^{3/4}))$ quando $0 < \alpha < 1$. In quest'ultimo caso, ponendo $\phi_\alpha(x) = 0$ in $[-\frac{1}{3}\log(1 - \alpha^{3/4}), +\infty)$ si ottiene un prolungamento di ϕ_α su $\mathbb{R}$. L'equazione differenziale mostra che y' è negativo nella regione $\{(x, y)\colon 0 < y < 1\}$; questo implica che il prolungamento di ϕ_α trovato è di fatto l'unico possibile. Si osservi che quando $\alpha = 0$ il PC_α ha due soluzioni locali: la $\phi(x) \equiv 0$ per ogni $x \in U(0)$ e la $\phi_0(x) = (1 - e^{3x})^{4/3}$ per $x < 0$, estesa con $\equiv 0$ in $x \geq 0$.

6a] *(6 p.ti)* Sia

$$f(x) = \int_{1/4}^{x} \frac{\log u}{\sqrt{|(u-1)(u-2)|}}\, du.$$

(a)Determinare i domini di esistenza e quello di derivabilità per f;
(b)Determinare i limiti di f al bordo e le sue proprietà di monotonia;
(c)Tracciare un grafico qualitativo di f (convessità non richiesta).

Risp. Sia $F(x) := \frac{\log x}{\sqrt{|(x-1)(x-2)|}}$. Si tratta di una funzione continua in $(0, +\infty)\backslash\{1, 2\}$, con discontinuità eliminabile in $x = 1$ ed asintoti verticali in $x = 0$ ed $x = 2$; inoltre $F(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\log x$ per $x \to 0^+$ (quindi integrabile in 0^+), $F(x) \sim \frac{\log 2}{\sqrt{|x-2|}}$ per $x \to 2$ (quindi integrabile in $U(2)$) e $F(x) \sim \frac{\log x}{x}$ per $x \to +\infty$ (quindi non integrabile a $+\infty$). Questo mostra che $f(x)$ è definita in $[0, +\infty)$, continua su tale dominio, e derivabile in $(0, 2) \cup (2, +\infty)$, con $f'(x) = F(x)$ su tale dominio (con $f'(1) = 0$ che è il valore che estende $F(x)$ per continuità in 1). Inoltre $f'(2^-) = +\infty$ e $f'(2^+) = +\infty$, quindi il punto $x = 2$ è un punto a tangente verticale per f. Dal segno di F si ricava che f è decrescente in $[0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty)$. Il punto $x = 1$ è di minimo assoluto per f.