Cognome **Nome** **matr.**

L.Tr. in Fisica **Analisi Matematica 2** proff. G.Molteni e M.Vignati

19/7/2017 **prova scritta #3** vers. A

1A] (4 p.ti) Individuare tutti i punti stazionari di $g(x, y) = 2x^3 + 6xy - 6x^2 - 3y^2$, e classificarne la natura (min/max/sella).

Risp.:

2A] (4 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$ siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) := 3^{-n}(x - 3)^n + 5^{-n}(4 - x)^n$$

i) Determinare l'insieme I di convergenza puntuale di $\{f_n\}$ e la funzione limite $f : I \to \mathbb{R}$.

ii) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in I e nei suoi sottointervalli.

Risp. **i)** **ii)**

3A] (6 p.ti) Determinare la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x^2y'' - 5xy' + 3y = 2x \\ y(1) = 2 \ ; \ \ y'(1) = 3 \end{cases}$$

Risp.:

4A] (7 p.ti) **i)** Determinare l'insieme I dei valori $x \in \mathbb{R}$ per i quali

$$F(x) := \int_{\pi/4}^{x} \frac{dt}{[(1-\cos t)(1+2\cos t)]^{1/2}}$$

converge.

ii) Stabilire dove la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è: continua, derivabile, monotona. Determinarne gli eventuali asintoti. Tracciarne un grafico qualitativo.

Sol.

5A] (9 p.ti) **i)** Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{2x} - 4\dfrac{\sqrt{y}}{x^{3/4}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ii) Osservare che y può essere prolungata in modo da ottenere una soluzione di $(*)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in $(0, +\infty)$. Tale prolungamento è unico?

Sol.

Cognome **Nome** **matr.**

L.Tr. in Fisica **Analisi Matematica 2** proff. Molteni e Vignati

19/7/2017 **prova scritta #3** vers. B

1B] (4 p.ti) Individuare tutti i punti stazionari di $g(x, y) = \dfrac{4}{3}x^3 + 4xy - 2x^2 - y^2$, e classificarne la natura (min/max/sella).

Risp.:

2B] (4 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$ siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) := 2^{-n}(x-1)^n + 4^{-n}(2-x)^n$$

i) Determinare l'insieme I di convergenza puntuale di $\{f_n\}$ e la funzione limite $f : I \to \mathbb{R}$.

ii) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in I e nei suoi sottointervalli.

Risp. **i)** **ii)**

3B] (6 p.ti) Determinare la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x^2y'' - 5xy' + 3y = 6x \\ y(1) = 0 \ ; \ \ y'(1) = 1 \end{cases}$$

Risp.:

4B] (7 p.ti) **i)** Determinare l'insieme I dei valori $x \in \mathbb{R}$ per i quali

$$F(x) := \int_{\pi}^{x} \frac{dt}{[(1-\sin t)(1+2\sin t)]^{1/2}}$$

converge.

ii) Stabilire dove la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è: continua, derivabile, monotona. Determinarne gli eventuali asintoti. Tracciarne un grafico qualitativo.

Sol.

5B] (9 p.ti) **i)** Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{3x} - 2\dfrac{\sqrt{y}}{x^{5/6}} \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

ii) Osservare che y può essere prolungata in modo da ottenere una soluzione di $(*)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in $(0, +\infty)$. Tale prolungamento è unico?

Sol.

Cognome	**Nome**	**matr.**
L.Tr. in Fisica	**Analisi Matematica 2**	proff. Molteni e Vignati
19/7/2017	**prova scritta #3**	vers. C

1C] (4 p.ti) Individuare tutti i punti stazionari di $g(x, y) = 6x^2 + 3y^2 + 6xy + 2x^3$, e classificarne la natura (min/max/sella).

Risp.:

2C] (4 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$ siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) := 3^{-n}(3 - x)^n + 5^{-n}(x - 2)^n$$

i) Determinare l'insieme I di convergenza puntuale di $\{f_n\}$ e la funzione limite $f : I \to \mathbb{R}$.

ii) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in I e nei suoi sottointervalli.

Risp. **i)** **ii)**

3C] (6 p.ti) Determinare la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x^2y'' - 5xy' + 3y = 4x \\ y(1) = 1 \ \ ; \ \ y'(1) = 2 \end{cases}$$

Risp.:

4C] (7 p.ti) **i)** Determinare l'insieme I dei valori $x \in \mathbb{R}$ per i quali

$$F(x) := \int_{-\pi/2}^{x} \frac{dt}{[(1-\cos t)(1+2\cos t)]^{1/2}}$$

converge.

ii) Stabilire dove la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è: continua, derivabile, monotona. Determinarne gli eventuali asintoti. Tracciarne un grafico qualitativo.

Sol.

5C] (9 p.ti) **i)** Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{2x} - 2\dfrac{\sqrt{y}}{x^{3/4}} \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

ii) Osservare che y può essere prolungata in modo da ottenere una soluzione di $(*)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in $(0, +\infty)$. Tale prolungamento è unico?

Sol.

Cognome **Nome** **matr.**

L.Tr. in Fisica **Analisi Matematica 2** proff. Molteni e Vignati

19/7/2017 **prova scritta #3** vers. D

1D] (4 p.ti) Individuare tutti i punti stazionari di $g(x,y) = 2x^2 + y^2 + 4xy - \frac{4}{3}x^3$, e classificarne la natura (min/max/sella).

Risp.:

2D] (4 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$ siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f_n(x) := 3^{-n}(2-x)^n + 5^{-n}(x-1)^n$$

i) Determinare l'insieme I di convergenza puntuale di $\{f_n\}$ e la funzione limite $f : I \to \mathbb{R}$.

ii) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in I e nei suoi sottointervalli.

Risp. **i)** **ii)**

3D] (6 p.ti) Determinare la soluzione locale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x^2y'' - 5xy' + 3y = 12x \\ y(1) = 1 \ ; \ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Risp.:

4D] (7 p.ti) **i)** Determinare l'insieme I dei valori $x \in \mathbb{R}$ per i quali

$$F(x) := \int_0^x \frac{dt}{[(1-\sin t)(1+2\sin t)]^{1/2}}$$

converge.

ii) Stabilire dove la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è: continua, derivabile, monotona. Determinarne gli eventuali asintoti. Tracciarne un grafico qualitativo.

Sol.

5D] (9 p.ti) **i)** Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{y}{3x} - 4\dfrac{\sqrt{y}}{x^{5/6}} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ii) Osservare che y può essere prolungata in modo da ottenere una soluzione di $(*)$ di classe $\mathcal{C}^1$ in $(0, +\infty)$. Tale prolungamento è unico?

Sol.