c.l. Fisica **Analisi Matematica 2** proff. Molteni/Zanco
18 Luglio 2019 Terzo appello a.a. 2018/19

1]*(6 p.ti)* Determinare gli eventuali punti estremanti della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) = |y|\mathrm{e}^{-|y|}(1+x^2y).$$

Stabilire quindi quale proprietà deve soddisfare un cono chiuso C di $\mathbb{R}^2$ illimitato e con vertice nell'origine affinché si abbia $\lim_{(x,y)\to\infty,\ (x,y)\in C} f(x,y) = 0$.

2]*(8 p.ti)* Assegnata l'equazione differenziale $\sqrt{x}\,y' + \sqrt{y}\sin\sqrt{x} = 0$, al variare del parametro reale non negativo α determinarne una soluzione locale soddisfacente la condizione $y(4\pi^2) = \alpha$. Individuare quindi i valori di α in corrispondenza ai quali la soluzione determinata ammette prolungamento massimale unico. Stabilire quindi quante soluzioni su $\mathbb{R}^+$ dell'equazione soddisfano la condizione $y(\pi^2/9) = 0$.

3]*(5 p.ti)* Assegnata l'equazione differenziale

$$(*) \qquad (y'')^2 + xy'' - y' = 0,$$

dimostrare che ogni polinomio che sia soluzione di (*) su $\mathbb{R}$ deve avere grado al più tre. Determinare quindi tutte le soluzioni polinomiali di (*) su $\mathbb{R}$.

4]*(5 p.ti)* Assegnata la serie di funzioni reali di variabile reale

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n!}$$

a) dimostrare che (*) converge uniformemente su $\mathbb{R}$;
b) dimostrare che la funzione somma di (*) è di classe $C^{(\infty)}$ su $\mathbb{R}$;
c) calcolare esplicitamente la funzione somma di (*). (*Può essere utile ricordare che, per ogni numero complesso z, si ha* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! = \mathrm{e}^z$.)

5]*(5 p.ti)* Sia f una generica funzione reale continua su [0,1]. Il limite $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x$ esiste ed è sicuramente uno dei seguenti valori: 0, $f(0)$, $1/2$, $f(1/2)$, 1, $f(1)$. Quale e perché?

6]*(7 p.ti)* Dopo aver determinato il dominio D della funzione reale di variabile reale

$$F(x) = \int_{\log(1+x)}^{x} \frac{\log(1+t)}{t^4}\,\mathrm{d}t, \qquad F(0) = 0,$$

stabilire se F è continua su D. Stabilire quindi a quali estremi di D il limite di F è finito, precisando se sia 0 oppure no.