Cognome **Nome** **Matr.**

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Vignati
12 Settembre 2017	4° **Appello d'esame**	versione A

1A] *(4 p.ti)* Determinare quali funzioni $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ della forma $f(x,y) := \alpha+\beta x+\gamma y+\rho x^2+\sigma xy+\tau y^2$ soddisfano le richieste

$$f(0,0) = 1, \qquad \nabla f(1,1) = (0,2), \qquad (\mathcal{H}f)(2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Risp. Una sola: $f(x,y) = 1 - 3x + 3y + x^2 + xy - y^2$.

2A] *(6 p.ti)* Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si considerino l'equazione differenziale

$$x^2y'' - 6xy' + 10y = -10\log x - 3 \qquad \text{ed il } PC_\alpha\colon \qquad \begin{cases} x^2y'' - 6xy' + 10y = -10\log x - 3 \\ y(1) = 4 \\ y'(1) = 3\alpha. \end{cases}$$

(a) Determinare esplicitamente tutte le soluzioni della sola equazione differenziale.
(b) Determinare esplicitamente la soluzione di PC_α.

Risp. La soluzione generale della equazione è $Ax^2 + Bx^5 - 1 - \log x$, con $A, B \in \mathbb{R}$. La soluzione di PC_α è $(8-\alpha)x^2 + (\alpha-3)x^5 - 1 - \log x$.

3A] *(4 p.ti)* Sia

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 8x^2 - 16x, \qquad xy \neq 0.$$

(a) Determinare i punti stazionari di f;
(b) classificare gli eventuali punti stazionari.

Risp. Vi sono due punti stazionari $(1, \pm 1)$, entrambi punti di minimo.

4A] *(4 p.ti)* Data la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{3^n+1}\, x^n,$$

(a) determinarne il raggio di convergenza;
(b) determinarne il dominio di convergenza.

Risp. Il raggio è 3 ed il dominio di convergenza è $(-3,3)$.

5A] *(8 p.ti)* Per ogni $\alpha > 0$ si consideri il Problema di Cauchy

$$PC_\alpha: \qquad \begin{cases} y' = \frac{3y}{x} - 4y^2 \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.
(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione.
(c) È possibile prolungare ϕ_α ad una soluzione di PC_α su $\mathbb{R}$? In quanti modi?

Risp. Eq. Bernoulli con esponente 2. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = x^3/(\alpha^{-1} - 1 + x^4)$ per $\alpha > 0$. La soluzione di PC_α con $\alpha = 0$ è invece $y \equiv 0$. Il dominio di ϕ_α è $((1-\alpha^{-1})^{1/4}, +\infty)$ (con asintoto verticale in $(1-\alpha^{-1})^{1/4}$) quando $\alpha \geq 1$ ed $(0, +\infty)$ quando $0 < \alpha < 1$. In quest'ultimo caso ponendo $\phi_\alpha(x) = 0$ in $(-\infty, 0]$ si ottiene un prolungamento di ϕ_α su $\mathbb{R}$, ma si possono ottenere infiniti altri prolungamenti ponendo ad esempio $\phi_\alpha(x) := -\phi_\beta(-x)$ per $x < 0$, con $\beta < 1$ qualsiasi.

6A] *(4 p.ti)* Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{nx} - 1}{4^{nx} + 1},$$

(a) determinare il suo insieme di convergenza puntuale;
(b) su quali intervalli la convergenza è uniforme?

Risp. Sia $f_n(x) := \frac{2^{nx}-1}{4^{nx}+1}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato. Se $x_0 < 0$ allora $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = -1$, quindi la serie non converge in tali punti. Poiché $f_n(0) = 0$ la serie converge in 0. Dalla stima $|f_n(x)| = \frac{2^{nx}-1}{4^{nx}+1} \leq \frac{2^{nx}-1}{4^{nx}} = 2^{-nx} - 4^{-nx}$ segue che la serie converge puntualmente in $x_0 > 0$. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $[0, +\infty)$. La stima precedente mostra anche che la convergenza è totale (quindi uniforme) in ogni dominio della forma $D_\epsilon := [\epsilon, +\infty)$ con $\epsilon > 0$. La convergenza non è uniforme in $[0, +\infty)$ poiché $\sup_{[0,+\infty)} |f_n(x)| \geq f_n(1/n) = 1/5 \not\to 0$ per $n \to +\infty$.

Cognome	**Nome**	**Matr.**

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Vignati
12 Settembre 2017	4° **Appello d'esame**	versione B

1B] *(4 p.ti)* Data la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \sin n}{4^n + 2}\, x^n,$$

(a) determinarne il raggio di convergenza;
(b) determinarne il dominio di convergenza.

Risp. Il raggio è 4 ed il dominio di convergenza è $(-4, 4)$.

2B] *(4 p.ti)* Sia

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{y^2} + y^2 + 2y, \qquad xy \neq 0.$$

(a)Determinare i punti stazionari di f;
(b)classificare gli eventuali punti stazionari.

Risp. Vi sono due punti stazionari $(\pm 1, -1)$, entrambi punti di minimo.

3B] *(4 p.ti)* Determinare quali funzioni $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ della forma $f(x,y) := \alpha + \beta x + \gamma y + \rho x^2 + \sigma xy + \tau y^2$ soddisfano le richieste

$$f(0,0) = 2, \qquad \nabla f(2,2) = (4,2), \qquad (\mathcal{H}f)(3,3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Risp. Una sola: $f(x,y) = 2 + 6x - 8y - x^2 + xy + 2y^2$.

4B] *(6 p.ti)* Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si considerino l'equazione differenziale

$$x^2y'' - 7xy' + 15y = 7 + 15\log x \qquad \text{ed il } PC_\alpha\colon \qquad \begin{cases} x^2y'' - 7xy' + 15y = 7 + 15\log x \\ y(1) = 2\alpha \\ y'(1) = 2. \end{cases}$$

(a) Determinare esplicitamente tutte le soluzioni della sola equazione differenziale.
(b) Determinare esplicitamente la soluzione di PC_α.

Risp. La soluzione generale della equazione è $Ax^3 + Bx^5 + 1 + \log x$, con $A, B \in \mathbb{R}$. La soluzione di PC_α è $(5\alpha - 3)x^3 + (2 - 3\alpha)x^5 + 1 + \log x$.

5B]_(4 p.ti)_ Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{nx}-1}{6^{nx}+3},$$

(a) determinare il suo insieme di convergenza puntuale;
(b) su quali intervalli la convergenza è uniforme?

Risp. Sia $f_n(x) := \frac{3^{nx}-1}{6^{nx}+3}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato. Se $x_0 < 0$ allora $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = -1/3$, quindi la serie non converge in tali punti. Poiché $f_n(0) = 0$ la serie converge in 0. Dalla stima $|f_n(x)| = \frac{3^{nx}-1}{6^{nx}+3} \le \frac{3^{nx}-1}{6^{nx}} = 2^{-nx} - 6^{-nx}$ segue che la serie converge puntualmente in $x_0 > 0$. L'insieme di convergenza puntuale è quindi $[0, +\infty)$. La stima precedente mostra anche che la convergenza è totale (quindi uniforme) in ogni dominio della forma $D_\epsilon := [\epsilon, +\infty)$ con $\epsilon > 0$. La convergenza non è uniforme in $[0, +\infty)$ poiché $\sup_{[0,+\infty)} |f_n(x)| \ge f_n(1/n) = 2/9 \not\to 0$ per $n \to +\infty$.

6B]_(8 p.ti)_ Per ogni $\alpha > 0$ si consideri il Problema di Cauchy

$$PC_\alpha: \qquad \begin{cases} y' = \frac{5y}{x} - 6y^2 \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.
(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione.
(c) È possibile prolungare ϕ_α ad una soluzione di PC_α su $\mathbb{R}$? In quanti modi?

Risp. Eq. Bernoulli con esponente 2. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = x^5/(\alpha^{-1} - 1 + x^6)$ per $\alpha > 0$. La soluzione di PC_α con $\alpha = 0$ è invece $y \equiv 0$. Il dominio di ϕ_α è $((1-\alpha^{-1})^{1/6}, +\infty)$ (con asintoto verticale in $(1-\alpha^{-1})^{1/6}$) quando $\alpha \ge 1$ ed $(0, +\infty)$ quando $0 < \alpha < 1$. In quest'ultimo caso ponendo $\phi_\alpha(x) = 0$ in $(-\infty, 0]$ si ottiene un prolungamento di ϕ_α su $\mathbb{R}$, ma si possono ottenere infiniti altri prolungamenti ponendo ad esempio $\phi_\alpha(x) := -\phi_\beta(-x)$ per $x < 0$, con $\beta < 1$ qualsiasi.
