Cognome **Nome** **Matr.**

---

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Vignati
12 Settembre 2018	4° **Appello d'esame**	versione A

1A] *(5 p.ti)* Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^2(1+y)^2-1}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) è continua in $(0,0)$;
(b) è differenziabile in $(0,0)$.

Risp. È continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 1/2$, è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 0$.

2A] *(6 p.ti)* Sia

$$f(x,y) = xe^{y^2} + ye^{x^2}.$$

(a) Determinare i punti stazionari di f;
(b) classificare gli eventuali punti stazionari.

Risp. Vi sono due punti stazionari $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, entrambi punti di sella.

3A] *(7 p.ti)*

a) Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = e^{1-\pi x} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e **diverso da** π, determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = e^{1-\pi x}.$$

Risp. $y(x) = (1 + \pi x + \frac{e}{2}x^2)e^{-\pi x}$ risolve il P.C.; la soluzione generale dell'equazione b) è $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-\alpha x} + \frac{e}{(\alpha-\pi)^2}e^{-\pi x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarie.

4A] *(6 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sia $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{(1-x)^{2n}}{e + x^2 \log n}.$$

a) Determinare l'insieme J di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e la funzione limite $f \colon J \to \mathbb{R}$.
b) Verificare che la convergenza di $\{f_n\}$ ad f nell'insieme $J \cap [1, +\infty)$ **è** uniforme.
c) Verificare che la convergenza di $\{f_n\}$ ad f nell'insieme $J \cap (-\infty, 1)$ **non è** uniforme.

Risp. Il dominio di convergenza puntuale J è l'insieme $[0,2]$ con $f(x) := 0$ in $(0,2]$ e $f(0) := 1/e$. Sull'insieme $J \cap (-\infty, 1) = [0,1)$ la convergenza non è uniforme, poiché f presenta una discontinuità in 0 mentre tutte le f_n sono continue in quel punto. La convergenza è invece uniforme in $J \cap [1, +\infty) = [1,2]$ poiché in $[1,2]$ valgono le stime $|x-1| \leq 1$ ed $x^2 \geq 1$, per cui $|f_n(x)| = \frac{(x-1)^{2n}}{e+x^2 \log n} \leq \frac{1}{\log n}$ su questo dominio, ovvero $\|f_n\|_{\infty,[1,2]} \leq \frac{1}{\log n}$, che tende a zero per n divergente.

5A] *(6 p.ti)* Studiare la funzione

$$F(x) := \int_x^{x^2} \frac{e^u}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u,$$

individuandone: dominio di esistenza, regolarità, estremanti locali e globali e limiti alla frontiera. Tracciarne poi un grafico qualitativo (NON è richiesto lo studio della convessità).

Risp. L'integranda $f(u) := \frac{e^u}{\sqrt{u}}$ è definita per $u > 0$ ed ammette derivate di ogni ordine. La funzione F quindi è definita in $x > 0$. La funzione f è in realtà integrabile (in senso improprio) in $u = 0$, quindi è possibile definire $G(x) := \int_0^x \frac{e^u}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u$, in $x \geq 0$. La funzione G risulta continua in $[0, +\infty)$ e derivabile ad ogni ordine in $(0, +\infty)$ (per il teorema fondamentale del calcolo integrale), con $G'(x) = f(x)$. In termini di G si ha $F(x) = G(x^2) - G(x)$ in $x > 0$; questa relazione mostra che F è prolungabile con continuità in $x = 0$ con $F(0) := 0$. La relazione mostra anche che F ha derivate ad ogni ordine in $(0, +\infty)$, con $F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2e^{x^2} - e^x/\sqrt{x}$. La formula mostra anche che $F(1) = G(1^2) - G(1) = 0$, quindi F deve avere almeno un estremante locale in $[0, 1]$. L'equazione $F'(x) = 0$, scritta come $2\sqrt{x} = e^{x-x^2}$, mostra facilmente che esiste un unico punto stazionario, che quindi deve essere l'estremamente di cui sopra. Dal fatto che $F'(0^+) := \lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2e^{x^2} - e^x/\sqrt{x} = -\infty$ segue che l'estremamente è un minimo e che tale minimo è assoluto. Si osservi che $x = 0$ è anch'esso un punto estremante (massimo locale), che però non è regolare. Infine, osserviamo che $f(u)$ è crescente per $u > 1/2$, e quindi che $F(x) > (x^2 - x)f(x)$ per $x \geq 1$: da qui segue che $F(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F(x) \geq \lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)f(x) = +\infty$. Questa relazione mostra anche che $F(x)$ cresce almeno come $\sqrt{x^3}\, e^x$ a $+\infty$, e quindi non presenta asintoti obliqui. L'assenza di un asintoto obliquo discende anche dal fatto che $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = +\infty$ (Si ricorda che se una funzione derivabile g ha asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ a $+\infty$ e se $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ esiste, allora questo limite deve essere finito e valere m.)

Cognome **Nome** **Matr.**

---

c.l. Fisica — **Analisi 2** — prof. Molteni/Vignati

12 Settembre 2018 — 4° **Appello d'esame** — versione B

1B] *(5 p.ti)* Stabilire per quali valori del parametro reale α la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(2+x)^2(2+y)^2 - 16}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) è continua in $(0,0)$;
(b) è differenziabile in $(0,0)$.

Risp. È continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 1$, è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 0$.

2B] *(6 p.ti)* Sia

$$f(x,y) = xe^{y^2} - ye^{x^2}.$$

(a) Determinare i punti stazionari di f;
(b) classificare gli eventuali punti stazionari.

Risp. Vi sono due punti stazionari $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, entrambi punti di sella.

3B] *(7 p.ti)*

a) Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2\pi y' + \pi^2 y = e^{1-\pi x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e **diverso da** π, determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = e^{1-\pi x}.$$

Risp. $y(x) = (x + \frac{e}{2}x^2)e^{-\pi x}$ risolve il P.C.; la soluzione generale dell'equazione b) è $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-\alpha x} + \frac{e}{(\alpha-\pi)^2}e^{-\pi x}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarie.

4B] *(6 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sia $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n}}{2 + x^2 \log n}.$$

a) Determinare l'insieme J di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e la funzione limite $f \colon J \to \mathbb{R}$.
b) Verificare che la convergenza di $\{f_n\}$ ad f nell'insieme $J \cap (-\infty, -1]$ **è** uniforme.
c) Verificare che la convergenza di $\{f_n\}$ ad f nell'insieme $J \cap (-1, +\infty)$ **non è** uniforme.

Risp. Il dominio di convergenza puntuale J è l'insieme $[-2, 0]$ con $f(x) := 0$ in $[-2, 0)$ e $f(0) := 1/2$. Sull'insieme $J \cap (-1, +\infty) = (-1, 0]$ la convergenza non è uniforme, poiché f presenta una discontinuità in 0 mentre tutte le f_n sono continue in quel punto. La convergenza è invece uniforme in $J \cap (-\infty, -1] = [-2, -1]$ poiché in $[-2 - 1]$ valgono le stime $|x+1| \leq 1$ ed $x^2 \geq 1$, per cui $|f_n(x)| = \frac{|x+1|^{2n}}{e + x^2 \log n} \leq \frac{1}{\log n}$ su questo dominio, ovvero $\|f_n\|_{\infty,[-2,-1]} \leq \frac{1}{\log n}$, che tende a zero per n divergente.

5B] *(6 p.ti)* Studiare la funzione

$$F(x) := \int_x^{x^2} \frac{e^u}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u,$$

individuandone: dominio di esistenza, regolarità, estremanti locali e globali e limiti alla frontiera. Tracciarne poi un grafico qualitativo (NON è richiesto lo studio della convessità).

Risp. L'integranda $f(u) := \frac{e^u}{\sqrt{u}}$ è definita per $u > 0$ ed ammette derivate di ogni ordine. La funzione F quindi è definita in $x > 0$. La funzione f è in realtà integrabile (in senso improprio) in $u = 0$, quindi è possibile definire $G(x) := \int_0^x \frac{e^u}{\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u$, in $x \geq 0$. La funzione G risulta continua in $[0, +\infty)$ e derivabile ad ogni ordine in $(0, +\infty)$ (per il teorema fondamentale del calcolo integrale), con $G'(x) = f(x)$. In termini di G si ha $F(x) = G(x^2) - G(x)$ in $x > 0$; questa relazione mostra che F è prolungabile con continuità in $x = 0$ con $F(0) := 0$. La relazione mostra anche che F ha derivate ad ogni ordine in $(0, +\infty)$, con $F'(x) = 2xG'(x^2) - G'(x) = 2e^{x^2} - e^x/\sqrt{x}$. La formula mostra anche che $F(1) = G(1^2) - G(1) = 0$, quindi F deve avere almeno un estremante locale in $[0, 1]$. L'equazione $F'(x) = 0$, scritta come $2\sqrt{x} = e^{x-x^2}$, mostra facilmente che esiste un unico punto stazionario, che quindi deve essere l'estremamente di cui sopra. Dal fatto che $F'(0^+) := \lim_{x\to 0^+} F'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2e^{x^2} - e^x/\sqrt{x} = -\infty$ segue che l'estremamente è un minimo e che tale minimo è assoluto. Si osservi che $x = 0$ è anch'esso un punto estremante (massimo locale), che però non è regolare. Infine, osserviamo che $f(u)$ è crescente per $u > 1/2$, e quindi che $F(x) > (x^2 - x)f(x)$ per $x \geq 1$: da qui segue che $F(+\infty) := \lim_{x\to+\infty} F(x) \geq \lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)f(x) = +\infty$. Questa relazione mostra anche che $F(x)$ cresce almeno come $\sqrt{x^3}\, e^x$ a $+\infty$, e quindi non presenta asintoti obliqui. L'assenza di un asintoto obliquo discende anche dal fatto che $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = +\infty$ (Si ricorda che se una funzione derivabile g ha asintoto obliquo di equazione $y = mx+q$ a $+\infty$ e se $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ esiste, allora questo limite deve essere finito e valere m.)
