Cognome	**Nome**	**Matr.**
c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Peloso
24 Gennaio 2017	5° **Appello d'esame**	versione A

1a] *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|y|^\alpha \sin(xy)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a)Per quali α la funzione è limitata nella bolla $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq 1\}$?
(b)Per quali α la funzione è continua in B?
(c)Per quali α la funzione è differenziabile in $(0,0)$?

Risp. (a) $\alpha \geq 0$ (b) $\alpha > 0$ (c) $\alpha > 1$

2a] *(6 p.ti)* Per ogni valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si considerino l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' - 3y = (5x+1)e^{2x} \qquad \text{ed il } PC_\alpha\colon \quad \begin{cases} y'' + 2y' - 3y = (5x+1)e^{2x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 4\alpha - 1. \end{cases}$$

(a)Determinare esplicitamente tutte le soluzioni della sola equazione differenziale.
(b)Determinare esplicitamente la soluzione di PC_α.

Risp. sol. della equazione: $Ae^x + Be^{-3x} + (x-1)e^{2x}$, con $A, B \in \mathbb{R}$. La soluzione di PC_α è $\alpha(e^x - e^{-3x}) + (x-1)e^{2x}$.

3a] *(4 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia

$$f_n(x) = \frac{n \sin(nx)}{1+n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a)Determinare l'insieme di definizione della funzione $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
(b)In quale/i insieme/i la successione converge uniformemente?

Risp. La successione converge puntualmente su $E = \mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La convergenza è uniforme in ogni dominio $D_\epsilon = \{x \colon |x| \geq \epsilon\}$; infatti $|f_n(x)| = \frac{n|\sin(nx)|}{1+n^2x^2} \leq \frac{n}{1+n^2x^2}$ e in D_ϵ questo è $\leq \frac{n}{1+n^2\epsilon^2} \leq \frac{1/\epsilon^2}{n}$. La convergenza invece non è uniforme in $\mathbb{R}$ (e più in generale in ogni insieme che abbia 0 come punto di accumulazione) poiché $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \geq |f_n(1/n)| = \frac{\sin 1}{2} n$ che diverge a $+\infty$ quando $n \to \infty$.

4a] *(4 p.ti)* Data la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{2n3^n+4} x^n,$$

(a)determinarne il raggio di convergenza;
(b)determinarne il dominio di convergenza.

Risp. Il raggio è $3/2$ ed il dominio di convergenza è $[-3/2, 3/2)$.

5a] *(6 p.ti)* Per ogni $\alpha > 0$ si consideri il Problema di Cauchy

$$PC_\alpha: \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{3y}{2x^2} - \dfrac{3y^{1/3}}{2x^3} \\ y(1) = \alpha^{3/2} \end{cases} \qquad \text{in } x > 0.$$

(a)Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.
(b)Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione.
(c)È possibile prolungare ϕ_α ad una soluzione di PC_α su $(0, +\infty)$?

Risp. Eq. Bernoulli con esponente 3/2. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = (\alpha e^{1-1/x} + \frac{1}{x} - 1)^{3/2}$ per $\alpha > 0$, e tra le soluzioni di PC_α con $\alpha = 0$ v'è la $y \equiv 0$. La funzione $(1 - \frac{1}{x})e^{-1+1/x}$ (studiata come ue^{-u} con $u := 1 - \frac{1}{x}$ e quindi con $u \in (-\infty, 1)$) ha $1/e$ come estremo superiore (raggiunto solo come limite per $x \to +\infty$). Di conseguenza il dominio di ϕ_α è $(0, +\infty)$ quando $\alpha \geq 1/e$, ed in $(0, x_\alpha)$ quando $0 < \alpha < 1/e$, dove x_α è la soluzione di $\alpha e^{1-1/x} + \frac{1}{x} - 1$ (che esiste sempre, unica, quando $\alpha \in (0, 1/e)$, ed è in $(1, +\infty)$ quindi a destra del punto iniziale). In quest'ultimo caso ponendo $\phi_\alpha(x) = 0$ in $[x_\alpha, +\infty)$ si ottiene un prolungamento di ϕ_α su $(0, +\infty)$ poiché $\phi'_\alpha(x_\alpha) = 0$.

6a] *(6 p.ti)* Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia

$$f_\alpha(x, y) = \alpha \log(1 + xy) - x - y \qquad \text{con } (x, y) \colon 1 + xy > 0.$$

(a)Determinare i punti stazionari di f_α al variare di α;
(b)Classificare gli eventuali punti stazionari nel caso $\alpha = \sqrt{13}$.

Risp. Se $|\alpha| < 2$ non vi sono punti stazionari. Se $|\alpha| = 2$ vi è un unico punto stazionario in $x_0 := (\alpha, \alpha)$. Due punti stazionari se $|\alpha| > 2$, nei punti $a_+ := \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4}, \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4})$, $a_- := \frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}, \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4})$. Nel caso di $\alpha = \sqrt{13}$ il punto a_+ risulta di massimo ed il punto a_- una sella.
