c.l. Fisica	**Analisi Matematica 2**	proff. Molteni/Zanco
27 Gennaio 2020	**Quinto appello**	a.a. 2018/19

Cognome:. Nome:. Matr. . . . .
Autorizzo la pubblicazione dell'esito della mia prova tramite il numero di matricola sulla pagina web dei docenti.
Firma: . . . .

Opzione non vincolante per la prova orale: ☐ 03/02/'20 ☐ seconda metà di Febbraio

1] *(6 p.ti)* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = (y - x^3 + x^2)|y|.$$

Se ne determinino l'insieme dei punti di differenziabilità e gli eventuali punti estremanti, specificando per ciascuno se sia un estremante globale o solo locale.

2] *(8 p.ti)* Per ogni valore del parametro reale non negativo α si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2 y' = \sqrt{y} - xy \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

(1) Mostrare che per ogni $\alpha > 0$ ne esiste un'unica soluzione locale e determinarla esplicitamente.

(2) Determinarne le soluzioni massimali.

3] *(6 p.ti)* È assegnata la serie di funzioni reali di variabile reale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nx} - 2}{3^{nx} + 1} \ .$$

(1) Determinarne l'insieme D di convergenza puntuale.
(2) Stabilire su quali intervalli contenuti in D la convergenza è uniforme.
(3) Stabilire in quali punti la somma della serie è continua.

4] *(4 p.ti)* Determinare quante funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e continue soddisfano la relazione

$$f(x) = 4 + \int_1^{x/2} \sin(uf(2u))\, \mathrm{d}u \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nota: si presti attenzione alla domanda: si chiede *quante*, non *quali*. In particolare *non* è richiesta la determinazione esplicita delle (eventuali) soluzioni.

5] *(5 p.ti)* Dimostrare o confutare la seguente affermazione.
Sia $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione reale positiva continua. Allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^{+\infty} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Nota: entrambi gli integrali sono intesi in senso improprio secondo Riemann.

6] *(6 p.ti)* Sia F la funzione reale definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{(3-t)\log(1+2|t|)}{t(4-t)^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Se ne tracci un grafico qualitativo, specificandone in particolare il dominio e gli eventuali punti di non derivabilità; non è richiesto l'esame del verso della concavità.