c.l. Fisica	**Analisi Matematica 2**	proff. Molteni/Zanco
13 febbraio 2020	**Sesto appello**	a.a. 2019/20

Cognome:....................Nome:....................Matr.....................
Autorizzo la pubblicazione dell'esito della mia prova tramite il numero di matricola sulla pagina web dei docenti.
Firma: ....

Opzione non vincolante per la prova orale: ☐ 10/03/'20 ☐ fine Marzo / inizio Aprile

1] *(6 p.ti)* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = ((x-1)^2 + 4y^2 - 1)((x+1)^2 + 9y^2 - 1).$$

Se ne determinino gli eventuali punti estremanti, specificando per ciascuno se sia un estremante globale o solo locale.

2] *(6 p.ti)* Al variare del parametro reale α, si consideri il problema di Cauchy

$$(P_\alpha) \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{4x+2}{x^2+x+1}(y^2-4y+4) \\ y(0) = \alpha\,. \end{cases}$$

Mostrare che, per ogni valore di α, (P_α) ammette soluzione massimale unica. Determinare quindi la soluzione massimale del caso $\alpha = 2$ e di quello $\alpha = \frac{1}{2\log 3} + 2$, specificando per ciascuna il dominio.

3] *(7 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f_n(x) := \frac{\arctan(n+x)}{1+x^2} \ .$$

(1) Determinarne l'insieme D di convergenza puntuale.
(2) Stabilire su quali intervalli contenuti in D la convergenza è uniforme.
(3) Determinare il valore di

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{e di} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

4] *(5 p.ti)* Per quali valori del parametro reale $a \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$ay'' + 16y' + 3y = 0$$

ha una qualche soluzione $\varphi(x)$ non identicamente nulla e tale per cui anche $\varphi(3x)$ è soluzione?

5] *(6 p.ti)* Della successione di funzioni $f_n \colon E \to \mathbb{R}$ si sa che essa converge uniformemente in E ad una funzione $f \colon E \to \mathbb{R}$. Sia poi $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una mappa continua. Mostrare che, se g è uniformemente continua (su $\mathbb{R}$), la convergenza di $g \circ f_n$ a $g \circ f$ è sicuramente uniforme in E. Mostrare con un esempio che questo non è detto accada quando g non è uniformemente continua. Che cosa si può affermare in proposito se g è solo continua, ma f è limitata?

6] *(6 p.ti)* Per ogni valore del parametro reale a, sia F_a la funzione reale definita da

$$F_a(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{4+t^2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - a\sqrt{x} \ .$$

Determinare l'unico valore di a in corrispondenza del quale F_a è limitata, giustificando la risposta. Detto $\tilde{a}$ questo numero, si tracci poi un diagramma plausibile di $F_{\tilde{a}}$ specificandone i dati essenziali; non è richiesto l'esame del verso della concavità.