UNA INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI: EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

GIOVANNI NALDI

1. Preliminari

Le equazioni differenziali rappresentano uno degli strumenti più efficaci per la costruzione di modelli matematici. Esse sono utilizzate nei più svariati campi dell'ingegneria e delle scienze applicate: dalla fisica alla biologia, dall'informatica alla chimica. A causa della vastità dell'argomento ciò che segue non potrà rappresentare che una introduzione di carattere elementare, rinviando per gli opportuni approfondimenti alla bibliografia relativa al corso di Istituzioni di Matematiche II per questo corso di laurea di Scienze Ambientali.

- C.D. Pagani, S. Salsa, *Analisi Matematica Volume 2*, Masson 1998.
- N. Fusco, P. Marcellini, M. Sbordone, *Analisi Matematica II*, Liguori Editore, Napoli 1996.
- E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 1983.

2. Esempi introduttivi

Si chiama *equazione differenziale ordinaria* una qualunque relazione tra una variabile indipendente t, una funzione incognita $u(t)$ e di alcune delle sue derivate:

$$F(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n)}(t)) \;=\; 0, \tag{1}$$

dove F è definita su un sottoinsieme A di $\mathbf{R}^{n+2}$. Solitamente t rappresenta una variabile (per esempio il tempo) rispetto a cui un certo sistema fisico (biologico, chimico,...) evolve secondo determinate leggi. Se è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo, l'equazione si dice in *forma normale*:

$$u^{(n)} = f((t, u(t), u'(t), ..., u^{(n-1)}(t))$$

dove ora $f : D \subseteq \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$.Nel caso in cui la funzione F è lineare rispetto a ciascuna delle variabili $u(t), u',\ u^{(2)}..., u^{(n)}$, l'equazione differenziale si può scrivere nella forma:

$$a_0(t)u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + ... + a_n(t)u(t) = b(t),$$

e l'equazione si dice *lineare*.

Definizione 2.1. *Una funzione $u : I \to \mathbf{R}$, dove I è un intervallo ed u è derivabile n volte, si dice soluzione (o integrale) dell'equazione differenziale ordinaria (1), se $((t, u(t), u'(t), ..., u^{(n)}) \in A$ per $t \in I$ e $F(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n)}(t)) \;=\; 0,\ \forall t \in I$.*

Esempi di equazioni differenziali sono già stati considerati nell'ambito del corso di Istituzioni di Matematiche I come vedremo nel primo esempio che segue.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli studi di Milano-Bicocca.

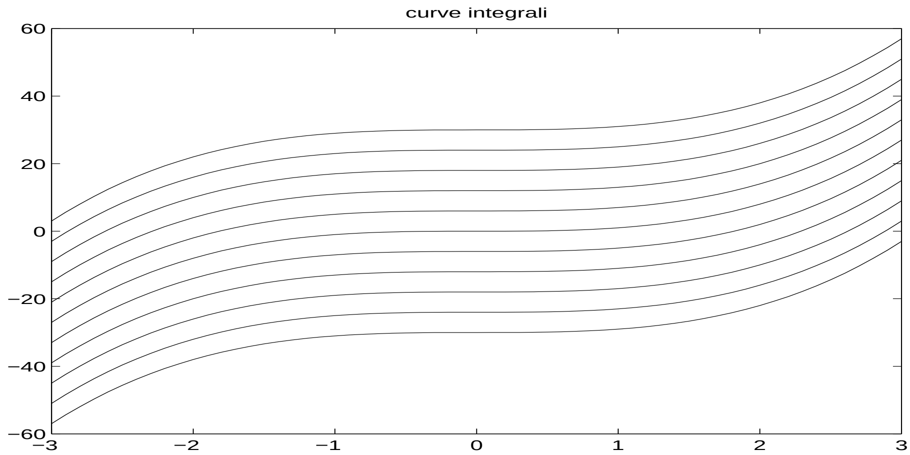

Figura 1:soluzioni per una equazione differenziale del tipo $u'(t) = f(t)$.

Esempio 1.
Data una funzione $f : I \to \mathbf{R}$, dove I è un intervallo, cerchiamo le funzioni derivabili in I tali che

$$u'(t) = f(t), \ \forall t \in I.$$

Si tratta della ricerca delle primitive di una certa funzione f in I: cioè della ricerca dell'integrale indefinito. Se, per esempio, la funzione f è una funzione continua è noto che il problema ha soluzione, anzi un insieme di soluzioni indicato con

$$\int f(t) \ dt.$$

Due soluzioni differiscono per una costante e la funzione $f(t)$ determina, in ogni punto, la pendenza della retta tangente alla curva $u(t)$, soluzione che passa per tale punto. In figura 1. si sono riportati i grafici di alcune curve integrali per una equazione del tipo considerato. Se fissiamo un punto (t_0, u_0) con $t_0 \in I, \ u_0 \in \mathbf{R}$ è naturale porsi la domanda se ora è assicurata l'unicità nel caso in cui si imponga alla soluzione di passare per il punto assegnato: $u(t_0) = u_0$. La condizione posta si chiama *condizione di Cauchy* o condizione inziale. Il problema corrispondente si chiama *problema di Cauchy* o problema ai valori iniziali. Nel caso di f funzione continua abbiamo in effetti una sola soluzione data da (si ottiene dal secondo teorema fondamentale del calcolo):

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t) \ dt.$$

Ad esempio la soluzione del problema di Cauchy (su tutta la retta reale, $I = \mathbf{R}$)

$$\begin{array}{l} u'(t) = t, \ t \in \mathbf{R} \\ u(0) = 1 \end{array}$$

si ottine dall'integrazione (non chiameremo la variabile di integrazione t ma x per evitare confusioni)

$$\int_0^t u'(x)dx = \int_0^t x dx \Rightarrow u(t) - u(0) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t$$

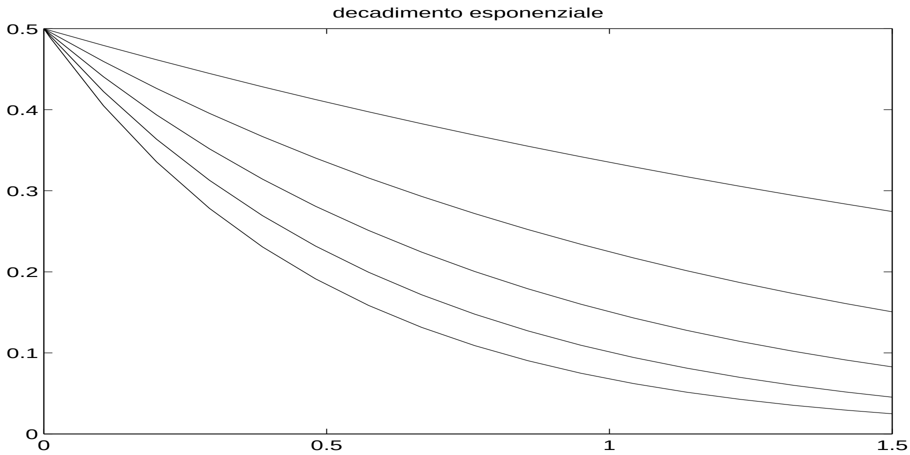

Figura 2: soluzioni tipiche per l'equazione differenziale del decadimento radioattivo.

e quindi $u(t) = 1 + t^2/2$. È facile verificare che la soluzione trovata verifica l'equazione differenziale e la condizione iniziale, la soluzione trovata è anche l'unica.
Esempio 2.
Alcuni fenomeni sono rappresentati dall'accescimento o dal decadimento di certe quantità. Per esempio, indicando con $N(t)$ il numero di atomi di un certo elemento presenti al tempo t, tale numero diminuirà a causa del fenomeno della radioattività in modo proporzionale al numero stesso di atomi $N(t)$ (come mostrato sperimentalmente da Rutherford), abbiamo quindi la seguente equazione differenziale per il decadimento radioattivo:

$$N'(t) = -\lambda N(t) \tag{2}$$

dove la costante λ è positiva (costante di decadimento della sostanza in considerazione). Sia noto il valore iniziale $N(t_0) = N_0 > 0$, se $N(t) \neq 0$ possiamo dividere per $N(t)$ ed integrare tra t_0 e t (chiamiamo la variabile di integrazione s):

$$\int_{t_0}^{t} \frac{N'(s)}{N(s)} ds \;=\; \int_{t_0}^{t} -\lambda ds$$

da cui:

$$\log|N(t)| - \log|N_0| = -\lambda(t - t_0) \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

In figura 2. riportiamo l'andamento qualitativo, per diversi valori di λ delle soluzioni dell'equazione (2). Dato che $N(t) > 0$ si ha che $N'(t) < 0$ e quindi la funzione è monotona strettamente decrescente. Ma è possibile dimostrare che $N_0 > 0 \Rightarrow N(t) > 0,\ \forall t > 0$? Se "avessimo a disposizione" un teorema di esistenza ed unicità per la soluzione dell'equazione differenziale (2) la "conservazione" del segno per la funzione $N(t)$ sarebbe assicurata. Infatti la funzione $N(t)$ è regolare (almeno derivabile con derivata prima continua) e se $N(t_1) < 0$ per un certo $t_1 > 0$ allora esisterebbe (teorema dei valori intermedi per le funzioni continue o teorema degli zeri) un punto t_2 tale che $N(t_2) = 0$. Ma allora per i punto $(t_2, 0)$ passerebbero almeno due soluzioni: la soluzione $N(t)$ del problema di Cauchy di partenza e la soluzione nulla $N^*(t) = 0$, contraddicendo l'unicità. Si confronti con Figura 3. per avere una idea grafica della situazione.

Una applicazione dell'equazione del decadimento radioattivo riguarda la datazione

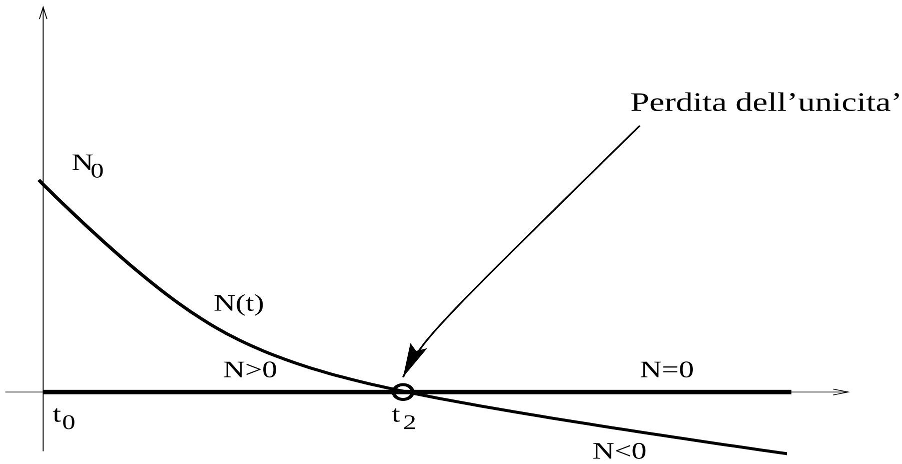

Figura 3: conservazione del segno per la soluzione dell'equazione (2).

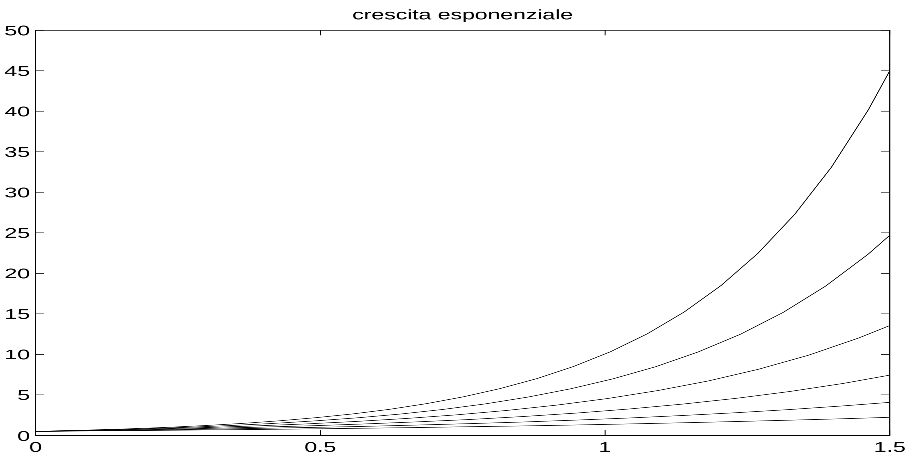

Figura 4: tipiche soluzioni per un processo a "crescita esponenziale".

di reperti o di opere d'arte. Infatti dall'espressione della soluzione si ottiene:

$$(t - t_0) = \frac{1}{\lambda} \log \left(N_0 / N(t) \right)$$

e quindi dalla conoscenza della costante di decadimento λ, delle quantità $N(t)$ e N_0 riferite ad una certa sostanza presente nel reperto, è possibile stimare l'età del reperto stesso. In realtà mentre λ e $N(t)$ sono disponibili usualmente N_0 non è noto ed occorre determinarlo indirettamente da proprietà del materiale.
Per fenomeni di crescita a volte si considerano equazioni del tipo

$$V'(t) = \lambda V(t)$$

con λ parametro positivo. L'andamento qualitativo delle soluzioni, per un dato iniziale positivo (questa volta il segno si mantiene a causa della monotonia) è mostrato per un esempio in figura 4.

Esempio 3.

Nell'esempio del decadimento radioattivo la soluzione esisteva, ed era unica, per tutti i tempi $t \geq 0$. Non sempre è possibile definire la soluzione su un prefissato intervallo di partenza. Consideriamo, per esempio, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{array}{l} u'(t) = 1 + u^2(t) \\ u(0) = 0 \end{array} \tag{3}$$

Ogni soluzione di (3) è regolare: u derivabile $\Rightarrow$ u continua $\Rightarrow$ u' continua, dall'equazione (3), $\Rightarrow$ u derivabile due volte con derivata seconda continua (si deriva l'equazione (3) rispetto a t), ed iterando il procedimento si deduce che la soluzione u ha derivate continue di ogni ordine. Sia u una soluzione ed I un intervallo in cui sia definita, e $0 \in I$, allora si ha

$$\frac{u'(t)}{1+u^2(t)} = 1 \ \forall t \in I \ e \ u(0) = 0.$$

e dunque per ogni $t \in I$, integrando entrambi i membri si ottiene

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{1+u^2(s)} ds \ = \ \int_0^t 1 \ ds \ = \ t$$

e, con la sostituzione $x = u(s)$,

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{1+u^2(s)} ds \ = \ \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{dx}{1+x^2} \ = \ arctan(u(t)).$$

Da quanto scritto segue che

$$u(t) = tan(t) \ \forall t \in I, \tag{4}$$

ed in particolare deve necessariamente valere l'inclusione $I \subseteq]-\pi/2, \pi/2[$. Viceversa, fissato ad arbitrio un intervallo I contenuto in $]-\pi/2, \pi/2[$, e contenente $t = 0$, la funzione $u(t) = tan(t)$ risolve il problema (3). Dunque le *soluzioni locali* di (3) sono tutte e sole le funzioni date dalla formula (4). Il problema "in grande" non è invece risolubile: nessuna soluzione è definita in tutto $\mathbf{R}$. La *soluzione massimale* (non riesco ad "estenderla oltre"), sarà ottenuta da (4) con $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Una motivazione, almeno euristica, di quello che avviene per l'equazione (3) potrebbe essere data considerando la crescita di $u(t)$, e quindi, di conseguenza, la crescita di u' che è legata ad u tramite l'equazione, nell'intorno del punto iniziale per $t = 0$.

Esempio 4.

Negli esempi precedenti la soluzione del problema di Cauchy era unica, consideriamo ora la seguente problema al valore iniziale

$$\begin{array}{l} u'(t) = \sqrt{|u(t)|} \\ u(0) = 0 \end{array} \tag{5}$$

La funzione nulla $u(t) \equiv 0$ è soluzione del problema ma si verifica facilmente tramite una sostituzione diretta che anche la funzione

$$u(t) = \begin{cases} x^2/4 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2/4 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è soluzione di (5). Anzi, per ogni coppia di valori $a < 0 < b$ la funzione

$$u(t) = \begin{cases} (x-b)^2/4 & \text{se } x \geq b \\ 0 & \text{se } a < x < b \\ -(x-a)^2/4 & \text{se } x \leq a \end{cases}$$

è soluzione del problema di Cauchy (5). Si noti che la funzione $f(u) = \sqrt{|u|}$ è una funzione regolare tranne che in intorni che contegano il punto $u = 0$. In particolare

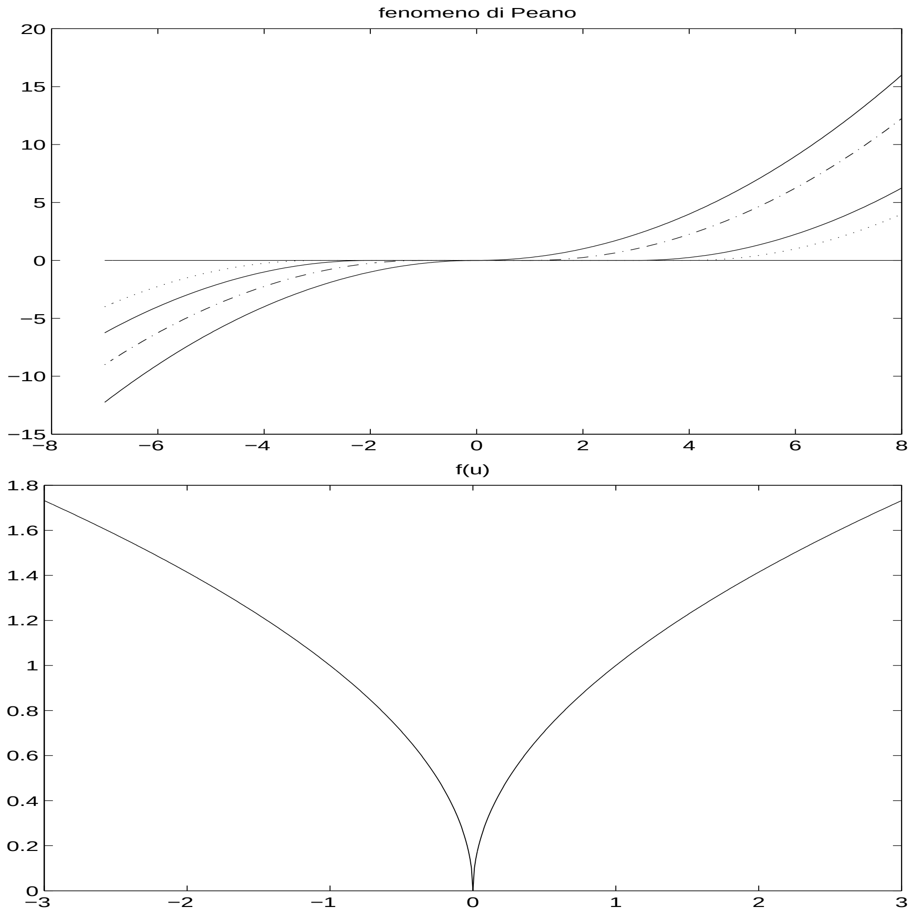

Figura 5: esempio di una famiglia di soluzioni nel caso del fenomeno di Peano.

la crescita vicino al punto $u = 0$ è "più che lineare" non essendo più $\sqrt{|u|}$ lipschitziana.

Esempio 5.

Se consideriamo una specie e l'evoluzione del numero di individui di quella determinata specie, il modello di crescita esponenziale potrebbe essere valido (nel senso che potrebbe essere in buon accordo con l'osservazione sperimentale) ma solo nel caso in cui la popolazione non sia molto grande. Infatti gli individui, al crescere della popolazione, potrebbero entrare in competizione tra di loro a causa di limitate risorse disponibili. Un primo modello che tenga in considerazione questo fenomeno è stato proposto dal biomatematico Verhulst nel 1837. Nel modello di Verhulst la dinamica della popolazione $p(t)$ al tempo t è governata dall'equazione differenziale (equazione logistica):

$$p'(t) = ap(t) - bp^2(t) \tag{6}$$

dove a e b sono costanti positive. Supponiamo anche di avere un dato iniziale, $p(0) = p_0 > 0$. Prima di cercare una soluzione dell'equazione differenziale cerchiamo di fare una *analisi qualitativa* dell'equazione per poter dedurre propietà della soluzione. Se la soluzione esiste ed è unica per ogni $t > 0$ con considerazioni analoghe a quelle

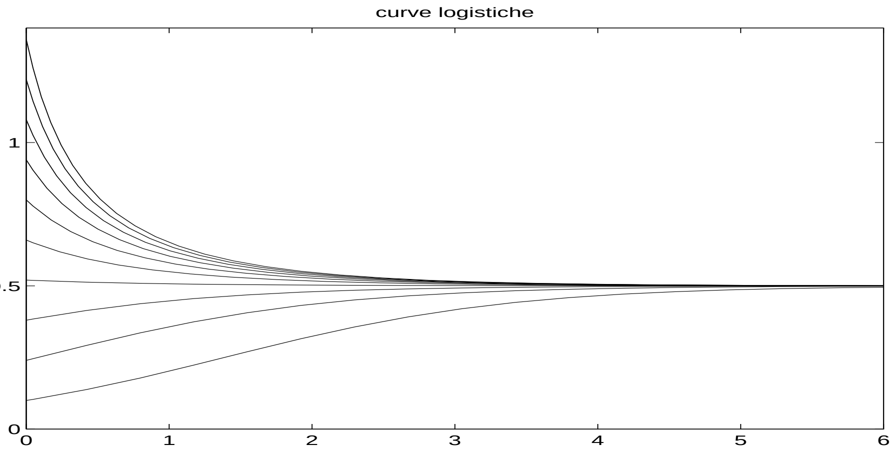

Figura 6: famiglia di soluzioni dell'equazione logistica (6) per diverse condizioni iniziali.

fatte nell'esempio del decadimento radioattivo, abbiamo che $p(t) > 0$, $\forall t > 0$. Consideriamo la funzione $f(p) = ap - bp^2$, il cui grafico è una parabola con radici $p_1 = 0$, $p_2 = a/b$. Nel caso in cui $p(t) = p_{1,2}$ la soluzione resta costante, $p(t) = p_1$, oppure $p(t) = p_2$: infatti $p'(t)$ si annulla e quindi, dato che siamo su un intervallo, $p(t) = costante$. Il caso $p(t) \equiv 0$ non risulta interessante e non lo considereremo (abbiamo infatti $p(0) \neq 0$ essendo il dato iniziale positivo). È invece interessante stabilire se può accadere che partendo da una popolazione non nulla p_0, la $p(t)$ possa tendere verso zero: cioè la popolazione va verso l'estinzione. Vediamo di analizzare tre casi: $p_0 = a/b$, $p_0 < a/b$, $p_0 > a/b$. Il primo caso è già stato descritto: la soluzione è $p(t) \equiv a/b$, $\forall t \geq 0$.Supporremo nel seguito che anche per l'equazione logistica valga un teorema di esistenza ed unicità della soluzione.
Nel secondo caso ,$p_0 < a/b$, dato che $f(p_0) = ap_0 - bp_0^2 > 0$ la soluzione $p(t)$ cresce partendo da p_0. La derivata prima p' si mantiene positiva perchè $p(t)$ non può raggiungere, o superare, il valore a/b (se infatti esistesse un t_1 tale che $p(t_1) \geq a/b$ allora, data la regolarità di p e per il teorema dei valori intermedi, $\exists t_2 > 0 : \ p(t_2) = a/b$ e quindi per il punto $(t_2, a/b)$ passerebbero due soluzioni). Quindi la soluzione è monotona crescente e tale che $p_0 \leq p(t) < a/b$. Se la funzione $p(t)$ è monotona e limitata in $[0, +\infty[$ esiste il limite per $t \to +\infty$ ed è finito, indichiamolo con l. Inoltre abbiamo, dall'equazione (6) che il limite per $t \to +\infty$ di $p'(t)$ vale $al - bl^2$. Ma se il limite di $p'(t)$ esiste esso non può che essere zero e quindi l deve eseere una radice della funzione $f(p)$: quindi $l = a/b$. La soluzione $p(t)$ ha allora un asintoto orizzontale di equazione $y = a/b$. Infine, derivando l'equazione differenziale (6) rispetto a t si ottiene:

$$p''(t) = ap'(t) - 2bp(t)p'(t) = (a - 2bp(t))p(t)(a - bp(t))$$

Abbiamo quindi che se $p(t) < a/2b$ allora $p''(t) > 0$ e quindi p è convessa, se invece $p(t) > a/2b$ la soluzione p è concava.
Nel caso in cui $p_0 > a/b$ si deduce, con ragionamenti analoghi a quelli fatti sopra, la monotonia della soluzione, l'esistenza dell'asintoto orizzontale e la convessità della soluzione stessa. In figura 6 si mostrano i grafici qualitativi delle soluzioni dell'equazione logistica corrispondenti a differenti condizioni iniziali. Per una ulteriore analisi del modello logisitco e di altri modelli simili si rimanda alla parte della

dispensa riguardante la dinamica di una o più popolazioni.

Esempio 6.

Consideriamo un punto materiale P di massa m soggetto ad una forza $F(t)$, la legge di Newton del moto (consideriamo un moto unidimensionale), fornisce l'equazione

$$F(t) = mu''(t)$$

dove $u(t)$ è la posizione del punto, rispetto ad un certo sistema di riferimento, al tempo t. L'equazione della dinamica del punto si può scrivere come

$$u''(t) = F(t)/m. \tag{7}$$

Il moto del punto può quindi essere descritto da una equazione differenziale del secondo ordine. Nota la forza F potremmo trovare una soluzione dell'equazione integrando due volte l'equazione del moto. Fissato un punto (t_0, u_0) possiamo determinare una sola soluzione? In questo caso è intuitivo che non è possibile, occorre una ulteriore condizione: dal punto di vista dinamico significa che la sola posizione iniziale non è sufficiente a determinare il moto ma, per esempio, anche la velocità iniziale del punto è necessaria per determinare univocamente $u(t)$. Sia t_0 il tempo iniziale e $t > t_0$, integrando la (7), posto $f(t) = F(t)/m$ con F continua, si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t} u''(s)ds \ = \ \int_{t_0}^{t} f(s)ds \ = \ u'(t) - u'(t_0)$$

ed integrando ancora

$$\int_{t_0}^{t} u'(s)ds \ = \ \int_{t_0}^{t} \left[u'(t_0) + \int_{t_0}^{x} f(s)ds \right] dx$$

da cui

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \left[u'(t_0) + \int_{t_0}^{x} f(s)ds \right] dx.$$

Dalla conoscenza dei valori $u(t_0)$, $u'(t_0)$ possiamo determinare una soluzione che sarà anche l'unica. Il problema ai valori iniziali per l'equazione del secondo ordine (7) ora considerato è il seguente

$$\begin{aligned} &u''(t) = f(t) \\ &u(t_0) = u_0 \\ &u'(t_0) = u'_0 \end{aligned}$$

Vediamo un ulteriore esempio di equazione del secondo ordine considerando un circuito elettrico composto da un generatore elettrico con una differenza di potenziale costante E_0, da una resistenza elettrica R, da un condensatore con capacità C ed una induttanza L, si veda figura 7. Indicando con $i(t)$ la corrente elettrica presente nel circuito e supponendo che all'istante $t = 0$ il circuito si chiuda tramite l'interrutore presente nel circuito stesso, $i(0) = 0$, l'equazione che governa l'andamento di $i(t)$ è

$$Li'(t) + Ri(t) + \int_{0}^{t} \frac{i(t)}{C} ds \ = \ E_0 \tag{8}$$

Derivando (8) si ottine la seguente equazione differenziale del secondo ordine

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{i(t)}{C} \ = \ 0 \tag{9}$$

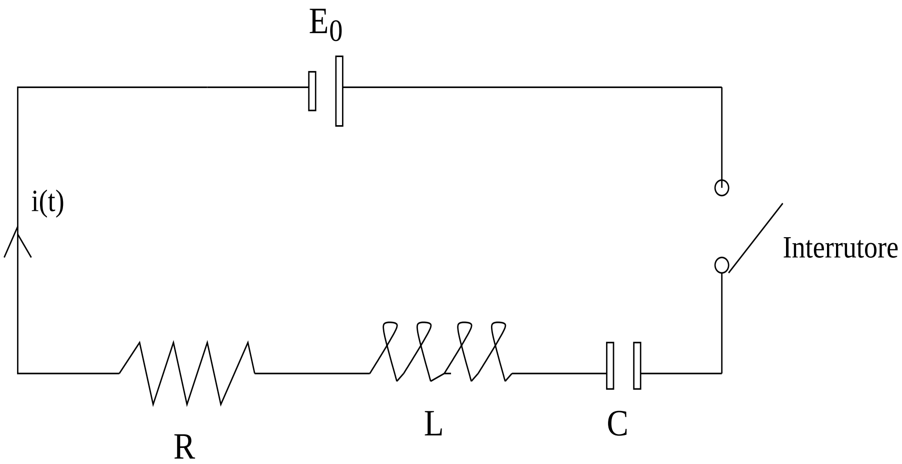

Figura 7: circuito RLC.

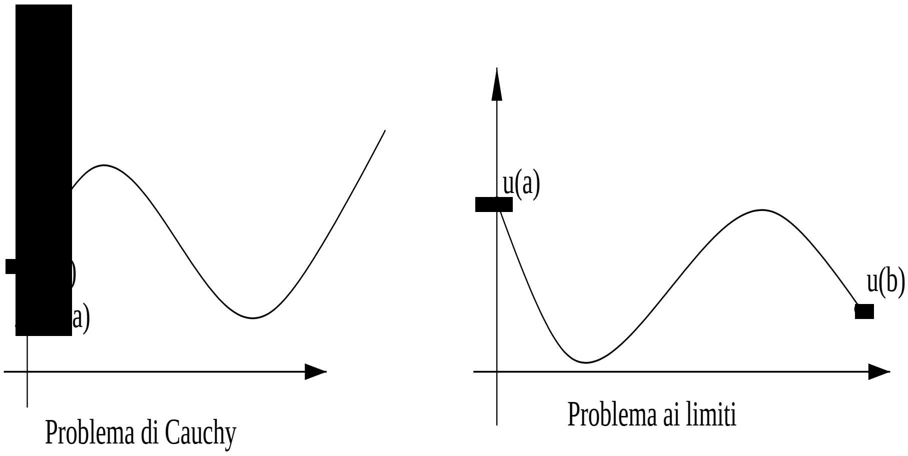

Figura 8: problema ai valori iniziali (di Cauchy) e problema ai limiti.

mentre le condizioni inziali si possono ancora dedurre dall'equazione (8):

$$i(0) = 0,\ Li'(0) + Ri(0) + \int_0^0 \frac{i(t)}{C} ds = E_0 \Rightarrow i'(0) = \frac{E_0}{L}.$$

In generale una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine in forma normale si scrive come $u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$. Nelle applicazioni non sempre vengono fornite le due condizioni iniziali (cioè il valore iniziale con la derivata) ma altre due condizioni: un valore iniziale $u(a) = u_a$, per un certo $t = a$, ed uno valore "finale" $u(b) = u_b$: il problema che si ottiene si chiama *problema ai limiti*. Continuando l'analogia cinematica del moto possiamo dire che il problema ai valori iniziali consiste nel fornire la posizione e la velocità iniziale insieme alla legge del moto mentre il problema ai limiti corrisponde a fornire la posizione iniziale, la posizione finale e la legge del moto (si confronti con la figura 8).

Si noti inoltre che è possibile riscrivere il problema del secondo ordine come un *sistema di equazioni differenziali del primo ordine*. posto infatti $u_1(t) = u(t),\ u_2(t) =$

$u'(t)$ si ottiene il sistema (equivalente all'equazione di partenza)

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = f(t, u_1(t), u_2(t)) \end{cases} \tag{10}$$

Possiamo inoltre introdurre una ulteriore variabile per t, $u_3(t) = t$, da cui si ottiene il seguente sistema equivalente al precedente e all'equazione del secondo ordine di partenza

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = f(u_3(t), u_1(t), u_2(t)) \\ u_3'(t) = 1 \end{cases} \tag{11}$$

Più in generale un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine si dice *autonomo* se non compare l'esplicita dipendenza dal tempo, come in (11):

$$\begin{cases} u_1'(t) = f_1(u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)) \\ u_2'(t) = f_2((u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)) \\ \vdots \\ u_n'(t) = f_n((u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)) \end{cases} \tag{12}$$

dove $u_1(t),\ u_2(t),\ ...,\ u_n(t)$ sono le funzioni incognite e le $f_i,\ i = 1, 2, ..., n$ sono opportune funzioni reali definite in un sottoisieme $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Il passaggio da una equazione di ordine n nell'incognita $u(t)$ ad un sistema del primo ordine di n equazioni può essere generalmente fatto introducendo le funzioni $u_i(t)$ corrispondenti ad opportune derivate successive della funzione u.
Una classe di esempi di sistemi di equazioni differenziali ordinarie di interesse biologico saranno considerati nella parte riguardante i modelli per la dinamica di popolazioni, tipico caso: modello preda-predatore.

3. Esistenza ed unicità

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{13}$$

con $f : D \to \mathbf{R}$ e $D \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto contenente il punto (t_0, u_0). Dagli esempi fatti sopra una ipotesi ragionevole per la funzione f è la continuità. Per avere l'unicità una ulteriore ipotesi deve essere fatta sulla f, per evitare situazioni come il fenomeno di Peano.

Definizione 3.1. *Una funzione reale $f(t, u)$ definita in un aperto $D \subseteq \mathbf{R}^2$ si dice localmente lipschitziana in D rispetto ad u ed uniformemente in t, se ogni punto di D ha un intorno V tale che esiste una costante L (costante di Lipschitz) per cui*

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$$

per ogni coppia di punti $(t, y),\ (t, z)$ in V.

Teorema 3.2 (Esistenza ed unicità locale)**.** *Sia $f : D \to \mathbf{R}$, con D aperto di $\mathbf{R}^2$, se*

1) *f è continua in D;*
2) *f è localmente lipschitziana in D rispetto ad u ed uniformemente in t.*

allora per ogni punto $(t_0, u_0) \in D$ *esiste un intorno* $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ *di* t_0 *nel quale è definita una soluzione* $u(t)$ *del problema di Cauchy (13). Tale soluzione è unica nel senso che ogni altra soluzione* $w(t)$ *del problema di Cauchy coincide con* $u(t)$ *nell'intervallo comune di definizione.*

Si osservi che una condizione che implica la locale lipschitzianità è che f sia continua con le sue derivate parziali. Infatti se la funzione $\partial f/\partial u$ è continua nel rettangolo (intorno chiuso) $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \eta]$ allora è limitata $|\partial f/\partial u| \leq M$ per cui, per il teorema del valor medio:

$$|f(t,y) - f(t,z)| = |\frac{\partial f}{\partial u}(t,\xi)||y - z|$$

con $(t,y),\ (t,z) \in R$ e ξ compreso tra y e z e quindi

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq M|y - z|$$

dove $M = max|\partial f/\partial u|$ in R. Vediamo un esempio di applicazione del teorema ora enunciato (la denominazione di *locale* per la soluzione indica il fatto che si asserisce l'esistenza e l'unicità della soluzione solo in un opportuno intorno del dato iniziale).
Esempio: equazioni differenziali a variabili separabili.
Si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} u'(t) &= a(t)b(u(t)) \\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned} \tag{14}$$

con

$a : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *continua,* I *intervallo*

$b : J \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *continua, con derivata prima continua,* J *intervallo.*

e $t_0 \in I$, $u_0 \in J$. L'equazione (14) è detta, per la sua forma, equazione a variabili separabili,$f(t,u) = a(t)b(u(t))$. Nelle ipotesi di regolarità fatte si ha che $\partial f/\partial u = a(t)b'(u)$ e quindi, essendo $b(u)$ di classe C^1, è continua e quindi sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale. L'ipotesi sulla funzione b potrebbe essere "indebolita" richiedendo la locale lipschitzianità. Il teorema assicura che c'è una sola soluzione ma non aiuta molto per il calcolo di questa soluzione. Nel caso di equazioni a variabili seperabili vi è qualche speranza in più. Consideriamo allora il problema $u'(t) = a(t)b(u(t))$. Innanzi tutto osserviamo che se $\overline{u} \in J$ è tale che $b(\overline{u}) = 0$, allora la funzione costante $u(t) = \overline{u}$ è soluzione dell'equazione in I. Quindi ad ogni radice della funzione b è associata una soluzione, costante, dell'equazione differenziale. D'altro canto il teorema di esistenza ed unicità ci permette di dire che se $u(t)$ è una soluzione dell'equazione definita in un certo intervallo $I_0 \subseteq I$, tale che almeno in un punto $t \in I_0$ non rende nullo $b(u(t))$, allora $b(u(t))$ sarà sempre diversa da zero su I_0. Infatti se $u(t)$ fosse tale da annullare b in qualche punto $\overline{t}$, il problema di Cauchy $u'(t) = a(t)b(u(t)),\ u(\overline{t}) = \overline{u}$ avrebbe due soluzioni distinte (questo tipo di argomento è stato più volte utilizzato negli esempi del paragrafo precedente): la funzione $u(t)$ in questione e la funzione costantemente uguale a $\overline{u}$. Pertanto se $u(t)$ è una soluzione su $I_0 \subseteq I$ o è $b(u(t)) = 0,\ \forall t \in I_0$, oppure $b(u(t)) \neq 0$ su tutto I_0, in quest'ultimo caso si avrà sempre $b(u(t)) > 0$ su tutto I_0 oppure $b(u(t)) < 0$ su tutto I_0 (altrimenti si tornerebbe alla contraddizione con il teorema degli zeri). Limitiamoci quindi a cercare le soluzioni $u(t)$ tali che $b(u(t)) \neq 0,\ t \in I_0$ con u che varia in un sottointervallo K di J, abbiamo

$$\frac{u'}{b(u(t)} = a(t)\ \forall t \in I_0$$

da cui

$$\int \frac{u'(t)}{b(u(t)}dt = \int a(t)dt.$$

Effettuiamo nell'integrale indefinito del primo membro la sostituzione $x = u(t)$

$$\left(\int \frac{dx}{b(x)}\right)_{x=u(t)} = \int a(t)dt.$$

Se $A(t)$ e $B(x)$ sono due primitive, rispettivamente di a su I_0 e di $1/b$ su K, si ha

$$(B(x))_{x=u(t)} = A(t) + c$$

con c costante reale, ovvero

$$B(u(t)) = A(t) + c. \tag{15}$$

Ma $B'(x) = 1/b(x)$ conserva su K segno costante, pertanto B è strettamente monotona su K e quindi invertibile. Se B^{-1} indica l'inversa di B, si ha

$$u(t) = B^{-1}\left(A(t) + c\right).$$

Esempio. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'(t) = e^{-u(t)}\left(t + t^3\right) \tag{16}$$

È una equazione a variabili separabili con, seguendo le notazioni proposte, $a(t) = (t + t^3)$, $b(u) = e^{-u}$. La funzione b non ha zeri per cui non abbiamo soluzioni costanti. Integrando l'equazione si ottiene

$$\int u'(t)e^{u(t)}dt = \int (t + t^3)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c$$

e quindi, osservando che nel primo integrale vi è la derivata di una funzione composta,

$$e^{u(t)} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c \Rightarrow u(t) = \log\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + c\right).$$

In figura 9 si riportano i grafici di alcune soluzioni, per diversi valori iniziali, e quindi della costante c. Nel caso si abbia da risolvere un problema di Cauchy con $u(t_0) = u_0$ per l'equazione a variabili separabili, si può procedere in due modi. Un modo consiste nell'utilizzare la formula (15) da cui si ricava $c = B(u_0) - A(t_0)$; è necessario ricordare che poi per passare alla forma esplicita occorre usare l'inversa della funzione B sull'intervallo K che contiene u_0. Un altro modo consiste nel risolvere l'equazione usando l'integrazione definita

$$\int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{b(u(s)}ds = \int_{t_0}^{t} a(s)ds.$$

Anche qui, usiamo la sostituzione $x = u(s)$:

$$\int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{dx}{b(x)} = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$

da cui

$$B(u(t)) - B(u(t_0)) = A(t) - A(t_0)$$

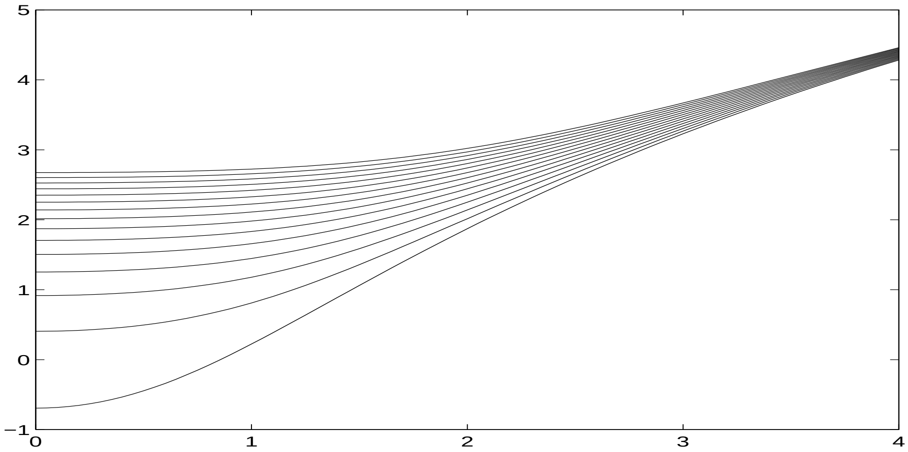

Figura 9: famiglia di soluzioni di (16).

ed infine:

$$u(t) = B^{-1}\left(B(u(t_0)) + A(t) - A(t_0)\right).$$

Esempio. Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$u'(t) = \sin\left(u(t)\right)$$

$$u(0) = \tfrac{11}{2}\pi$$

Seguendo la seconda strada:

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{\sin\left(u(s)\right)} ds = \int_0^t 1 \; ds$$

ovvero

$$\int_{11\pi/2}^{u(t)} \frac{dx}{\sin x} = t$$

e, poichè $\sin\left(11\pi/2\right) < 0$, abbiamo

$$\left[\log\left(-tan(t/2)\right)\right]_{11\pi/2}^{u(t)} = t$$

da cui, con semplici passaggi algebrici, si ricava

$$u(t) = 2\left(arctan(-e^t) + 3\pi\right).$$

La sola lipschitzianità locale non è sufficiente ad assicurare l'esistenza di una soluzione su un intervallo prefissato $[\alpha, \beta]$ o su tutta la retta reale (si pensi all'esempio 3. del paragrafo precedente). Sia $S = (\alpha, \beta) \times \mathbf{R}$ ed f definita su $\overline{S} = [\alpha, \beta] \times \mathbf{R}$ e soddisfacente le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale in S. Ciascuna delle seguenti condizioni implica che ogni soluzione dell'equazione differenziale $u'(t) = f(t, u)$ sia definita in tutto l'intervallo $[\alpha, \beta]$:

i) esistono due costanti $L,\ M$ tali che

$$|f(t, u)| \leq M + L|u|, \ \forall (t, u) \in \overline{S}$$

ii) f è limitata in $\overline{S}$.

Le condizioni sono solo sufficienti mentre se gli estremi α, β possono essere scelti ad arbitrio la soluzione può essere definita su tutta la retta reale $\mathbf{R}$. Una condizione diversa dalle precedenti consiste nello verificare che una soluzione rimane limitata (come nel caso dell'equazione logistica per cui si può definire la soluzione per tutti i valori $t \geq 0$).
Nel caso di esistenza ed unicità della soluzione un problema interessante consiste nello studio di come tale soluzione varia in corrispondenza a variazioni sui dati¡ in particolare, verificare se tale dipendenza è continua: studio della *sensitività*.
Inoltre, nelle applicazioni, vi è anche il problema della *identificazione* di eventuali parametri presenti nel modello in base a dati sperimentali relativi al fenomeno che si intende simulare (per esempio si pensi a come identificare una o tutte due le costanti a, b presenti nell'equazione logistica).
Infine va notato che è frequente il caso in cui occorre ricorrere ad opportuni metodi ed algoritmi numerici per trovare una approssimazione della soluzione di una equazione differenziale o di un sistema di equazioni differenziali perchè tale soluzione non è disponibile in forma analitica.

4. Equazioni lineari del primo ordine

Consideriamo in questo paragrafo le equazioni lineari del primo ordine

$$u'(t) + a(t)u(t) = b(t) \tag{17}$$

dove le funzioni a e b sono continue in un intervallo $I \subseteq \mathbf{R}$. Se riuscissimo a riscrivere l'equazione come

$$\frac{d}{dt}\text{“}qualcosa\text{''} = b(t)$$

allora potremmo effettuare una integrazione per individuare il termine “qualcosa”. Ma il termine $u'(t)+a(t)u(t)$ in (17) non appare come la derivata di qualche semplice espressione. Moltiplichiamo entrambi i membri per una funzione continua $\mu(t)$, si ottiene l'equazione equivalente

$$\mu(t)u'(t) + \mu(t)a(t)u(t) = \mu(t)b(t) \tag{18}$$

Scegliamo ora, se è possibile, la funzione $\mu(t)$ in modo tale che $\mu(t)u'(t)+\mu(t)a(t)u(t)$ sia la derivata di una funzione. Si osservi che

$$\frac{d}{dt}\mu(t)u(t) = \mu(t)\frac{d}{dt}u(t) + u(t)\frac{d}{dt}\mu(t)$$

e dunque $\mu(t)u'(t) + \mu(t)a(t)u(t)$ è la derivata di $\mu(t)u(t)$ se e solo se

$$\mu'(t) - a(t)\mu(t) = 0$$

cioè se la funzione μ è soluzione di una equazione lineare omogenea. Possiamo quindi scegliere una soluzione di tale equazione per ricondurci ad un caso “semplice”. Per quanto detto sulle equazioni a variabili separabili si trova che una soluzione è (fissando la costante di integrazione uguale ad uno)

$$\mu(t) = e^{\int a(t)\,dt}$$

Con questa scelta di $\mu(t)$ l'equazione (18) diventa

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)u(t)) = \mu(t)b(t) \tag{19}$$

integrando si ottiene

$$\mu(t)u(t) = \int \mu(t)b(t)dt + c$$

e quindi

$$u(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)b(t)dt + c\right) = e^{-\int a(t)dt}\left(\int \mu(t)b(t)dt + c\right).$$

Nel caso del problema di Cauchy con la usuale condizione iniziale $u(t_0) = u_0$, è possibile usare l'integrazione definita in (19):

$$\mu(t)u(t) - \mu(t_0)u_0 = \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds$$

e quindi

$$u(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\mu(t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds\right).$$

Ovviamente si potrebbe seguire la via della ricerca dell'integrale generale dell'equazione differenziale e poi trovare la costante c utilizzando la condizione iniziale. Un ulteriore modo di considerare la soluzione del problema di Cauchy consiste nel *metodo della variazione della costante*. Si considera dapprima l'equazione omogenea corrispondente

$$u'(t) + a(t)u(t) = 0$$

la cui soluzione generale è della forma (si può considerare ancora come una equazione a variabili separabili)

$$u(t) = ce^{-\int a(t)dt}.$$

Cerchiamo ora di soddisfare l'equazione non omogenea considerando la c come una funzione di t (equivale a cambiare le variabili)

$$u(t) = c(t)e^{-\int a(t)dt}$$

e sostituendo in (17) si ottiene

$$c'(t)e^{-\int a(t)dt} - c(t)a(t)e^{-\int a(t)dt} + c(t)a(t)e^{-\int a(t)dt} = b(t)$$

ossia

$$c'(t) = b(t)e^{\int a(t)dt}.$$

Integrando quest'ultima equazione si trova

$$c(t) = \int b(t)e^{\int a(s)ds}dt + c_1$$

e quindi

$$u(t) = c(t)e^{-\int a(t)dt} = c_1e^{-\int a(t)dt} + e^{-\int a(t)dt}\int b(t)e^{\int a(s)ds}dt$$

Pertanto, la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea è uguale alla somma della soluzione generale dell'equazione omogena corrispondente e di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, che si ottiene quando $c_1 = 0$. Per il problema di Cauchy la costante c_1 si può ottenere dalla condizione iniziale.
Esempio. Troviamo la soluzione del problema di Cauchy

$$u'(t) + 2tu(t) = t, \; u(1) = 2.$$

Abbiamo, utilizzando le medesime notazioni introdotte sopra,

$$\mu(t) = e^{\int 2tdt} = e^{t^2}$$

e quindi occorre considerare l'equazione

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2}u(t)) = te^{t^2}$$

e quindi

$$\int_1^t \frac{d}{ds}(e^{s^2}u(s))ds \;=\; \int_1^t se^{s^2}ds$$

da cui

$$\left[e^{s^2}u(s)\right]_1^t = \left[\frac{e^{s^2}}{2}\right]_1^t$$

ed infine

$$e^{t^2}u(t) - 2e = \frac{e^{t^2}}{2} - \frac{e}{2}$$

e

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{3e}{2}e^{-t^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{1-t^2}.$$

Analogamente si poteva considerare l'equazione omogenea

$$u'(t) + 2tu(t) = 0$$

che ha soluzione

$$u(t) = ce^{-t^2}$$

e considerando $c = c(t)$ e sostituendo nella non omogena:

$$c'(t)e^{-t^2} - 2tc(t)e^{-t^2} + 2tc(t)e^{-t^2} = t$$

da cui

$$c'(t) = te^{t^2}.$$

Integrando quest'ultima equazione nella variabile c si trova

$$c(t) = c_1 + \frac{e^{t^2}}{2}$$

e quindi

$$u(t) = \left(c_1 + \frac{e^{t^2}}{2}\right)e^{-t^2} = c_1e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

imponendo la condizione iniziale

$$u(1) = c_1e^{-1} + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow c_1 = \frac{3e}{2}$$

si ricava la costante c_1 e quindi la soluzione.
Esempio. Cerchiamo la soluzione generale dell'equazione

$$u'(t) - \frac{u(t)}{t} = t^2.$$

Integrando l'equazione omogenea corrispondente

$$u'(t) - \frac{u(t)}{t} = 0 \Rightarrow u(t) = ct$$

e, supponendo c funzione di t e sostituendo nell'equazione di partenza

$$c'(t)t + c(t) - \frac{c(t)t}{t} = t^2$$

da cui

$$c(t) = \frac{t^2}{2} + c_1.$$

La soluzione generale è quindi

$$u(t) = c_1 t + t^3/2.$$

A volte, per mezzo di una sostituzione delle variabili, una equazione differenziale non lineare si può ridurre ad una equazione lineare.

Esempio: equazione di Bernoulli. Si dice di Bernoulli un'equazione differenziale del primo ordine del tipo

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u^{\alpha}(t) \tag{20}$$

con $a(t)$, $b(t)$ funzioni continue nell'intervallo $[c, d]$ di $\mathbf{R}$ ed α numero reale diverso da 0 e da 1. La funzione $f(t, u) = a(t)u(t) + b(t)u^{\alpha}(t)$ è continua e localmente lipschitziana per cui il teorema di esistenza ed unicità assicura l'esistenza di una soluzione locale. Per $\alpha > 0$ una soluzione è la soluzione nulla, trascurando tale soluzione si può dividere ambo i membri dell'equazione per u^{α} si ha

$$\frac{u'(t)}{u^{\alpha}(t)} = a(t)u^{1-\alpha}(t) + b(t) \tag{21}$$

posto $z(t) = u^{1-\alpha}(t)$ si ha

$$z'(t) = \frac{d}{dt}u^{1-\alpha}(t) = (1-\alpha)\frac{u'(t)}{u^{\alpha}(t)}$$

ed in tal modo l'equazione differenziale (21) si trasforma nell'equazione lineare in $z(t)$

$$z'(t) = (1-\alpha)a(t)z(t) + (1-\alpha)b(t) \tag{22}$$

Risolta l'equazione lineare (22) si porrà $u(t) = z^{1/(1-\alpha)}(t)$. Determiniamo, per esempio, le soluzioni dell'equazione di Bernoulli

$$(1-t^2)u'(t) - tu(t) - tu^2(t) = 0.$$

Per $t \neq \pm 1$, l'equazione è equivalente a

$$u'(t) = \frac{t}{1-t^2}u(t) + \frac{t}{1-t^2}u^2(t)$$

che ha soluzione $u = 0$ negli intervalli in cui la funzione $t/1 - t^2$ è continua. Per $u \neq 0$ possiamo dividere l'equazione per u^2 e con la sostituzione $z = u^{-1}$, e quindi $z' = -u'u^{-2}$, si ottiene

$$z'(t) = -\frac{t}{1-t^2}z(t) - \frac{t}{1-t^2}$$

Integrando questa equazione si ottiene

$$z(t) = c\sqrt{|1-t^2|} - 1$$

e quindi

$$u(t) = z^{-1}(t) = \frac{1}{c\sqrt{|1-t^2|} - 1}$$

In figura 10 è riportato il grafico della soluzione del problema di Cauchy con $u(0) = 1$, da cui $c = 2$.

Un'altra equazione che potrebbe essere ricondotta ad una equazione lineare è

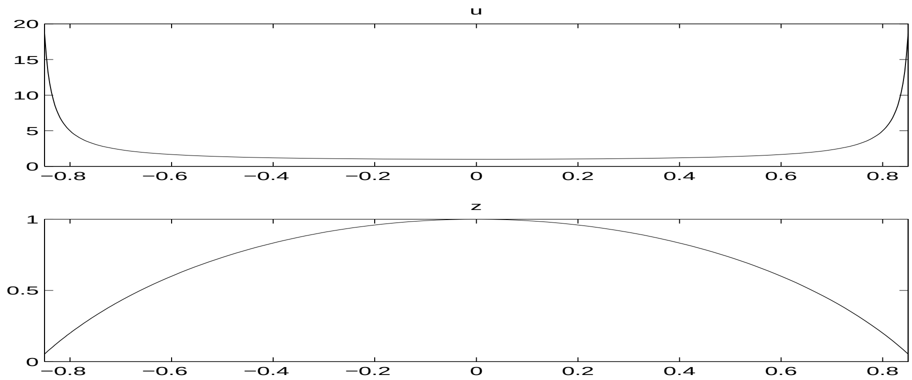

Figura 10: soluzione u e funzione z per un esempio di equazione di Bernoulli.

l'equazione di Riccati

$$u'(t) = p(t)u^2(t) + q(t)u(t) + r(t)$$

con $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ funzioni continue assegnate. Nel caso particolare $p \equiv 0$ si ha ancora un'equazione lineare e per $r \equiv 0$ un'equazione di Bernoulli. In caso contrario si può costruire l'integrale generale quando si conosce un integrale particolare. In effetti, sia $y(t)$ un integrale particolare dell'equazione di Riccati, la sostituzione

$$u(t) = y(t) + \frac{1}{z(t)}$$

dà origine, dopo le opportune semplificazioni, alla seguente equazione lineare

$$z'(t) + (2p(t)y(t) + q(t)) + p(t) = 0,$$

che può essere integrata (si ricordi che la funzione $y(t)$ è nota). Per esempio l'equazione

$$t^2u'(t) = t^2u^2(t) + tu(t) - 3$$

ha come soluzione particolare $y(t) = 1/t$ e la sostituzione $u(t) = 1/t + 1/z$ porta alla seguente equazione lineare, nell'incognita $z(t)$

$$t^2z'(t) + 3tz(t) = -t^2$$