

Cognome..... Nome..... Matricola.....

c.l. in Fisica, ANALISI MATEMATICA 1

27/01/2012

proff. M.Salvatori, M.Vignati

durata: 90'

vers. a

1a] (3 punti) Sia k un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + k^2x + k^3 - 3 & \text{se } x \in (-\infty, 1] \\ k [e^{5(x-1)} + 2k + 1] & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

i) La funzione f è continua in \mathbb{R} per i valori $k = \dots\dots\dots$

ii) La funzione f è derivabile in \mathbb{R} per i valori $k = \dots\dots\dots$

2a] (4 p.ti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$E_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2 + ny|x| < n + 3\} \quad \text{ed} \quad E := \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F):

i) E è aperto ii) E è chiuso

iii) E è compatto iv) $E' = \emptyset$

(Risposta corretta: +1; errata: -1; non data: 0)

3a] (3 p.ti) Sia f la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) := x + \sqrt{2 - x^2}.$$

Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, la cardinalità di $f^{-1}(\{y\})$, insieme delle controimmagini di y .

4a] (6 p.ti) Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che esista, e sia finito,

$$\ell := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} \log(1+x) - x(ax^2 + bx + c)}{x^4}.$$

$a = \dots ?$ $b = \dots ?$ $c = \dots ?$ $\ell = \dots ?$

5a] (5 p.ti) Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{a^2+a}}{\sqrt{(1+n^2)(1+n^{3a})}}$$

6a] (4 p.ti) Per quali $x \in \mathbb{R}$ è valida la disequazione

$$x - 1 + (3x - 1) \log x \leq 0 \quad ?$$

7a] (5 p.ti) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore di

$$L_\alpha := \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[\log \left(\frac{e(n+1)}{n} \right) - \sqrt{2} \sin \left(\frac{4 + \pi n}{4n} \right) \right].$$

(Riportare uno svolgimento completo.)

Cognome..... Nome..... Matricola.....

c.l. in Fisica, ANALISI MATEMATICA 1

27/01/2012

proff. M.Salvatori, M.Vignati

durata: 90'

vers. **b**

1b] (3 punti) Sia k un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} k [2k + 1 + e^{-5(x+1)}] & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ 3x^2 - k^2x + k^3 - 3 & \text{se } x \in [-1, +\infty) \end{cases}$$

i) La funzione f è continua in \mathbb{R} per i valori $k = \dots\dots\dots$

ii) La funzione f è derivabile in \mathbb{R} per i valori $k = \dots\dots\dots$

2b] (4 p.ti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$E_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 1 + nx |y| < 3n + 2\} \quad \text{ed} \quad E := \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F):

i) E è chiuso ii) E è compatto

iii) $E' = \emptyset$ iv) E è aperto

(Risposta corretta: +1; errata: -1; non data: 0)

3b] (3 p.ti) Sia f la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) := \sqrt{1 - x^2} - x.$$

Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, la cardinalità di $f^{-1}(\{y\})$, insieme delle controimmagini di y .

4b] (6 p.ti) Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che esista, e sia finito,

$$\ell := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(1 + x^2 - x) - x(ax^2 + bx + c)}{x^4}.$$

$a = \dots ?$ $b = \dots ?$ $c = \dots ?$ $\ell = \dots ?$

5b] (5 p.ti) Determinare, al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{b(2b+3)/2}}{\sqrt{(n^2+1)(1+n^{5b})}}$$

6b] (4 p.ti) Per quali $x \in \mathbb{R}$ è valida la disequazione

$$x - 1 + (2x - 1) \log x \leq 0 \quad ?$$

7b] (5 p.ti) Calcolare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, il valore di

$$L_\beta := \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\beta \left[\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi n + 4}{4n} \right) - \log \frac{e(1+n)}{n} \right].$$

(Riportare uno svolgimento completo.)

Cognome..... Nome..... Matricola.....

c.l. in Fisica, ANALISI MATEMATICA 1

27/01/2012

proff. M.Salvatori, M.Vignati

durata: 90'

vers. C

1c] (6 punti) Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che esista, e sia finito,

$$\ell := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-x} \log(1+x) - x(ax^2 + bx + c)}{x^4}.$$

$$a = \dots ? \quad b = \dots ? \quad c = \dots ? \quad \ell = \dots ?$$

2c] (5 p.ti) Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{a^2+a}}{\sqrt{(1+n^2)(1+n^{3a})}}$$

3c] (3 p.ti) Sia f la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) := x + \sqrt{2-x^2}.$$

Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, la cardinalità di $f^{-1}(\{y\})$, insieme delle controimmagini di y .

4c] (4 p.ti) Per quali $x \in \mathbb{R}$ è valida la disequazione

$$x - 1 + (3x - 1) \log x \leq 0 ?$$

5c] (3 p.ti) Sia k un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + k^2x + k^3 - 3 & \text{se } x \in (-\infty, 1] \\ k [e^{5(x-1)} + 2k + 1] & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

i) La funzione f è continua in \mathbb{R} per i valori $k = \dots\dots\dots$

ii) La funzione f è derivabile in \mathbb{R} per i valori $k = \dots\dots\dots$

6c] (4 p.ti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$E_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2 + ny|x| < n + 3\} \quad \text{ed} \quad E := \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F):

i) E è aperto ii) E è chiuso

iii) E è compatto iv) $E' = \emptyset$

(Risposta corretta: +1; errata: -1; non data: 0)

7c] (5 p.ti) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore di

$$L_\alpha := \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \left[\log \left(\frac{e(n+1)}{n} \right) - \sqrt{2} \sin \left(\frac{4 + \pi n}{4n} \right) \right].$$

(Riportare uno svolgimento completo.)

Cognome..... Nome..... Matricola.....

c.l. in Fisica, ANALISI MATEMATICA 1

27/01/2012

proff. M.Salvatori, M.Vignati

durata: 90'

vers. d

1d] (6 punti) Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo che esista, e sia finito,

$$\ell := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \log(1 + x^2 - x) - x(ax^2 + bx + c)}{x^4}.$$

$$a = \dots ? \quad b = \dots ? \quad c = \dots ? \quad \ell = \dots ?$$

2d] (5 p.ti) Determinare, al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{b(2b+3)/2}}{\sqrt{(n^2+1)(1+n^{5b})}}$$

3d] (3 p.ti) Sia f la funzione reale di variabile reale definita da

$$f(x) := \sqrt{1-x^2} - x.$$

Determinare, al variare di $y \in \mathbb{R}$, la cardinalità di $f^{-1}(\{y\})$, insieme delle controimmagini di y .

4d] (4 p.ti) Per quali $x \in \mathbb{R}$ è valida la disequazione

$$x - 1 + (2x - 1) \log x \leq 0 ?$$

5d] (3 p.ti) Sia k un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} k [2k + 1 + e^{-5(x+1)}] & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ 3x^2 - k^2x + k^3 - 3 & \text{se } x \in [-1, +\infty) \end{cases}$$

i) La funzione f è continua in \mathbb{R} per i valori $k = \dots\dots\dots$

ii) La funzione f è derivabile in \mathbb{R} per i valori $k = \dots\dots\dots$

6d] (4 p.ti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$E_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 1 + nx |y| < 3n + 2\} \quad \text{ed} \quad E := \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F):

i) E è chiuso ii) E è compatto

iii) $E' = \emptyset$ iv) E è aperto

(Risposta corretta: +1; errata: -1; non data: 0)

7d] (5 p.ti) Calcolare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, il valore di

$$L_\beta := \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\beta \left[\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi n + 4}{4n} \right) - \log \frac{e(1+n)}{n} \right].$$

(Riportare uno svolgimento completo.)