Cognome........................ Nome........................ Matricola........................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1**

9/02/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90'** vers. a

1a] (4 punti) Sia $q \in \mathbb{R}$, e siano f_q funzioni reali di variabile reale definite da

$$f_q(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x}{x-1} & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \\ 2x + q & \text{se } \ x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Dopo averne tracciato un grafico qualitativo, stabilire per quali valori q la funzione f_q ammette in $x = 3$ un punto di minimo relativo.

2a] (4 p.ti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$E_n := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exp\left[\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \left(x^2 - 2x \right) \right] \leq \frac{2}{e} \right\} \quad \text{ed} \quad E := \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \, .$$

Allora $E = \{x \in \mathbb{R} : ....\}$.
Stabilire poi se si tratta di un insieme aperto e/o chiuso e/o compatto.

3a] (4 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := e^x (x^2 + 2x - 2)$$

Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero $N(a)$ di soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$f(x) = a \, .$$

4a] (4 p.ti) Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n-1}\left[1-\sqrt[3]{1+n^{2\alpha}}\right] \ .$$

5a] (3 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sinh(x^3)}{1+x^2}$.

Determinare il valore che la sua derivata di ordine 11 assume nel punto $x = 0$.

$f^{(11)}(0) =$ ....

6a] (6 p.ti) Al variare del parametro reale $\alpha \in (0, +\infty)$ calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \alpha x + \frac{1}{2}x^{\alpha+1}}{\sqrt{1+x^2} - \cosh(e^x - 1)} \ .$$

7a] (5 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$a_n = \left[\cos\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - e^{-1/2n}\right] \log(1+3^n) \ .$$

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+a_n^2)$ .... $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos^2(a_n)}{\sqrt{n}}$ ....

$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\sinh(a_n)$ .... $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ ....

motivando le risposte.

Cognome........................ Nome........................ Matricola........................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1**

9/02/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90'** vers. b

1b] (4 punti) Sia $p \in \mathbb{R}$, e siano f_p funzioni reali di variabile reale definite da

$$f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \\ \\ p - 2x & \text{se } \ x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Dopo averne tracciato un grafico qualitativo, stabilire per quali valori p la funzione f_p ammette in $x = 1$ un punto di massimo relativo.

2b] (4 p.ti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$E_n := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exp\left[\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \left(x^2 - 2x\right) \right] \leq \frac{2}{e} \right\} \quad \text{ed} \quad E := \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\,.$$

Allora $E = \{x \in \mathbb{R} :$ ....$\}$.
Stabilire poi se si tratta di un insieme aperto e/o chiuso e/o compatto.

3b] (4 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := e^x(x^2 + x - 1)$$

Determinare, al variare di $b \in \mathbb{R}$, il numero $N(b)$ di soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$f(x) = b\,.$$

4b] (4 p.ti) Determinare, al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n+1}\left[1-\sqrt{n^{3\beta}+1}\right] \; .$$

5b] (3 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin(x^4)}{1+x^2}$.

Determinare il valore che la sua derivata di ordine 14 assume nel punto $x = 0$.

$f^{(14)}(0) = \dots\dots\dots\dots$

6b] (6 p.ti) Al variare del parametro reale $\beta \in (0, +\infty)$ calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta x - \frac{1}{2}x^{\beta+1} - \log(1+x)}{\cos(e^x - 1) - \sqrt{1-x^2}} \; .$$

7b] (5 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$a_n = \left[\cos\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - e^{-1/2n}\right] \log(1+3^n) \; .$$

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{1+a_n^2} - 1\right) \quad \dots\dots\dots\dots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh(a_n)}{n} \quad \dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(a_n)}{\sqrt{n}} \quad \dots\dots\dots\dots \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n} \quad \dots\dots\dots\dots$$

motivando le risposte.

Cognome........................ Nome........................ Matricola........................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1**

9/02/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90'** vers. C

1c] (4 punti) Determinare, al variare del parametro $\gamma \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n-1}\left[1-\sqrt[3]{1+n^{2\gamma}}\right] .$$

2c] **(**3 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sinh(x^3)}{1+x^2}$.

Determinare il valore che la sua derivata di ordine 11 assume nel punto $x = 0$.

$f^{(11)}(0) =$ ....

3c] (6 p.ti) Al variare del parametro reale $\gamma \in (0, +\infty)$ calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \gamma x + \frac{1}{2}x^{\gamma+1}}{\sqrt{1+x^2} - \cosh(e^x - 1)} .$$

4c] (5 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$a_n = \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - e^{-1/2n}\right] \log(1+3^n) .$$

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+a_n^2)$ .... $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos^2(a_n)}{\sqrt{n}}$ ....

$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\sinh(a_n)$ .... $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ ....

motivando le risposte.

5c] (4 p.ti) Sia $q \in \mathbb{R}$, e siano f_q funzioni reali di variabile reale definite da

$$f_q(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x}{x-1} & \text{se } x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \\ \\ 2x + q & \text{se } \ x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

Dopo averne tracciato un grafico qualitativo, stabilire per quali valori q la funzione f_q ammette in $x = 3$ un punto di inimo relativo.

6c] (4 p.ti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$E_n := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exp\left[\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \left(x^2 - 2x\right) \right] \leq \frac{2}{e} \right\} \quad \text{ed} \quad E := \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \, .$$

Allora $E = \{x \in \mathbb{R} :$ ....$\}$.
Stabilire poi se si tratta di un insieme aperto e/o chiuso e/o compatto.

7c] (4 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := e^x (x^2 + 2x - 2)$$

Determinare, al variare di $c \in \mathbb{R}$, il numero $N(c)$ di soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$f(x) = c \, .$$

Cognome........................ Nome........................ Matricola........................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1**

9/02/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90'** vers. d

1d] (4 punti) Determinare, al variare del parametro $\delta \in \mathbb{R}$, il carattere della serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n+1}\left[1-\sqrt{n^{3\delta}+1}\right] \ .$$

2d] (3 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin(x^4)}{1+x^2}$.

Determinare il valore che la sua derivata di ordine 14 assume nel punto $x = 0$.

$f^{(14)}(0) =$ ....

3d] (6 p.ti) Al variare del parametro reale $\delta \in (0, +\infty)$ calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\delta x - \frac{1}{2}x^{\delta+1} - \log(1+x)}{\cos(e^x-1) - \sqrt{1-x^2}} \ .$$

4d] (5 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$, sia

$$a_n = \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - e^{-1/2n}\right]\log(1+3^n) \ .$$

Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[3]{1+a_n^2}-1\right) \quad .... \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cosh(a_n)}{n} \quad ....$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(a_n)}{\sqrt{n}} \quad .... \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n} \quad ....$$

motivando le risposte.

5d] (4 p.ti) Sia $p \in \mathbb{R}$, e siano f_p funzioni reali di variabile reale definite da

$$f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x+1} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \\ \\ p - 2x & \text{se } \ x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Dopo averne tracciato un grafico qualitativo, stabilire per quali valori p la funzione f_p ammette in $x = 1$ un punto di massimo relativo.

6d] (4 p.ti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$E_n := \left\{ x \in \mathbb{R} : \exp\left[\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \left(x^2 - 2x\right) \right] \leq \frac{2}{e} \right\} \quad \text{ed} \quad E := \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \, .$$

Allora $E = \{x \in \mathbb{R} :$ ....$\}$.
Stabilire poi se si tratta di un insieme aperto e/o chiuso e/o compatto.

7d] (4 p.ti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := e^x (x^2 + x - 1)$$

Determinare, al variare di $d \in \mathbb{R}$, il numero $N(d)$ di soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$f(x) = d \, .$$