Cognome........................ Nome........................ Matricola........................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1**

18/06/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90'** vers. a

Per gli esercizi **1,2,5** è richiesta la sola risposta.
Degli esercizi **3,4,6** è richiesto uno svolgimento completo.

1a] (3 punti) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) := \begin{cases} b + e^{1/x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin(x^a)\log(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

i) Determinare <u>tutti e soli</u> i valori a, b per i quali f è continua in $\mathbb{R}$.

ii) Determinare <u>tutti e soli</u> i valori a, b per i quali f è derivabile in $\mathbb{R}$.

i) ....

ii) ....

2a] (4 p.ti) Determinare (se esistono)

$\inf E =$ .... ; $\min E =$ .... ; $\sup E =$ .... ; $\max E =$ ....

dove $E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \cos(\pi n) + \dfrac{n+2}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

3a] (7 p.ti) Per $\alpha \in \mathbb{R}$, ricavare il polinomio di McLaurin di grado 3 della funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{(1+x)^\alpha}\ .$$

4a] (7 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$, siano

$$a_n = \frac{1}{\sin(1/n)} \left[\exp\left(\frac{n\sqrt{2}-1}{n^2} \right) - 1 \right] \quad \text{e} \quad L := \lim_{n\to+\infty} a_n \ .$$

Per quali $p \in \mathbb{R}$ è convergente la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p \,(a_n - L) \ \ ?$$

5a] (4 p.ti) Sia $A \subset \mathbb{R}$ definito come:

$$A = ([0,1) \cap \mathbb{Q}) \cup [1,2] \cup \{4\} \ .$$

Determinare gli insiemi

$A^\circ =$ .... ; $\bar{A} =$ .... ; $\partial A =$ ....

6a] (5 p.ti) Al variare del parametro reale α calcolare (se esiste)

$$L_\alpha := \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x+x^2) - \sin x}{x^2 + x^\alpha} \ .$$

Cognome........................ **Nome**........................ **Matricola**........................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1**

18/06/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90'** vers. b

Per gli esercizi **1,2,5** è richiesta la sola risposta.
Degli esercizi **3,4,6** è richiesto uno svolgimento completo.

1b] (3 punti) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$g(x) := \begin{cases} a + e^{1/x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin\left(x^b\right) \log(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

i) Determinare tutti e soli i valori a, b per i quali g è continua in $\mathbb{R}$.

ii) Determinare tutti e soli i valori a, b per i quali g è derivabile in $\mathbb{R}$.

i) ....

ii) ....

2b] (4 p.ti) Determinare (se esistono)

$\inf E =$ .... ; $\min E =$ .... ; $\sup E =$ .... ; $\max E =$ ....

dove $E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \dfrac{n+2}{n+1} - \cos(\pi n)\,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

3b] (7 p.ti) Per $b \in \mathbb{R}$, ricavare il polinomio di McLaurin di grado 3 della funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{(1+x)^b}\,.$$

4b] (7 p.ti) Per $n \in \mathbb{N}$, siano

$$b_n = \frac{1}{\sin(1/n)} \left[\exp\left(\frac{-1 + n\sqrt{2}}{n^2} \right) - 1 \right] \quad \text{e} \quad L := \lim_{n \to +\infty} b_n \ .$$

Per quali $q \in \mathbb{R}$ è convergente la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^q \, (b_n - L) \ \ ?$$

5b] (4 p.ti) Sia $B \subset \mathbb{R}$ definito come:

$$B = ([0, 2) \cap \mathbb{Q}) \cup [2, 3] \cup \{5\} \ .$$

Determinare gli insiemi

$B^\circ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\bar{B} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\partial B = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6b] (5 p.ti) Al variare del parametro reale β calcolare (se esiste)

$$L_\beta := \lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + x + x^2) - \sin x}{x^2 + x^\beta} \ .$$