

Cognome..... Nome..... Matricola.....

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** preferenza orale .....

11/07/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90'** vers. **A**

Esercizi **1,3,4**: sola risposta. Degli esercizi **2,5,6** è richiesto uno svolgimento completo.

**1a]** (3+3=6 punti) Sia  $a \in (0, +\infty)$  e sia  $f_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f_a(x) := \frac{\log(1+x^{2a})}{x^{4a} + \arctan(x^3)} .$$

**i)** Per quali  $a$  la funzione  $f_a$  è prolungabile con continuità in  $x = 0$ ? .....

**ii)** Per quali  $a$  la serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_a(n)$  converge? .....

---

**2a]** (6 p.ti) Determinare, al variare del parametro reale  $a$ , le soluzioni  $x \in \mathbb{R}$  di

$$\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{x-a}{x}} < 1 .$$

---

**3a]** (4 p.ti) È data  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$f(x) := 1 - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + x \left( \frac{\pi}{2} + \arctan x \right)$$

Determinare:

**i)** (eventuali) asintoti .....

**ii)** (eventuali) estremanti .....

**iii)** Calcolare  $\inf f(\mathbb{R}) = \dots\dots\dots$  ,  $\sup f(\mathbb{R}) = \dots\dots\dots$  .

**iv)** Calcolare  $(f^{-1})'(1) = \dots\dots\dots$

**4a]** (4 p.ti) Sia

$$A = [-2, -1) \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Determinare gli insiemi

$$A^\circ = \dots\dots\dots; \quad \bar{A} = \dots\dots\dots; \quad \partial A = \dots\dots\dots$$

---

**5a]** (4 p.ti) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$A = \{x \in [0, \pi] : (x^2 - 3) \cos x - 2x \sin x + 4 = 0\}$$

---

**6a]** (2+4=6 p.ti) Sia  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f(x) := \frac{e^{1-\cos \sqrt{x}} - 1}{\log(x+1)}.$$

Calcolare (se esistono)

$$\text{i) } L := \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad ; \quad \text{ii) } M := \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - L}{x}.$$

Cognome..... Nome..... Matricola.....

c.l. in Fisica, ANALISI MATEMATICA 1 preferenza orale .....

11/07/2012 prof. M.Salvatori, M.Vignati durata: 90' vers. b

Esercizi 1,3,4: sola risposta. Degli esercizi 2,5,6 è richiesto uno svolgimento completo.

1b] (3+3=6 punti) Sia  $b \in (0, +\infty)$  e sia  $f_b : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f_b(x) := \frac{\log(1 + x^{3b})}{x^{6b} + \arctan(x^4)} .$$

i) Per quali  $b$  la funzione  $f_b$  è prolungabile con continuità in  $x = 0$ ? .....

ii) Per quali  $b$  la serie numerica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_b(n)$  converge? .....

---

2b] (6 p.ti) Determinare, al variare del parametro reale  $b$ , le soluzioni  $x \in \mathbb{R}$  di

$$1 < \sqrt{\frac{x}{x-b}} < 3 .$$

---

3b] (4 p.ti) È data  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$f(x) := \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) + \pi .$$

Determinare:

i) (eventuali) asintoti .....

ii) (eventuali) estremanti .....

iii) Calcolare  $\inf f(\mathbb{R}) = \dots\dots\dots$  ,  $\sup f(\mathbb{R}) = \dots\dots\dots$  .

iv) Calcolare  $(f^{-1})'(\pi) = \dots\dots\dots$

4b] (4 p.ti) Sia

$$B = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup (1, 3] .$$

Determinare gli insiemi

$$B^\circ = \dots\dots\dots; \quad \bar{B} = \dots\dots\dots; \quad \partial B = \dots\dots\dots$$

---

5b] (4 p.ti) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$B = \left\{ x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] : (x^2 - 4) \sin x + 2x \cos x + 1 = 0 \right\}$$

---

6b] (2+4=6 p.ti) Sia  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$f(x) := \frac{\log(\cos \sqrt{x})}{e^x - \cos x} .$$

Calcolare (se esistono)

$$\text{i) } L := \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad ; \quad \text{ii) } M := \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - L}{x} .$$