**Cognome............................ Nome....................... Matricola..................**

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

21/11/2011 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90 minuti** versione A

**1A]** (3 punti) Le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione

$$2^{x+1} > 4 \cdot 2^{-\sqrt{2|x|}}$$

sono:

---

**2A]** (5 pt.) Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\alpha + e^{-n}}{1 + n^{\alpha+1}} \, .$$

---

**3A]** (3pt.) Sia $E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = (x+1)\,|2y-3|\,;\ -1 < x < 2,\ 1 < y \leq 4\}$. Allora

$\inf E =$ .......... ; $\sup E =$ .......... . Esistono: $\min E =$ ........... , $\max E =$ .......... ?

---

**4A]** (4 pt.) Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora:

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0$, $\{x_n\}$ è definitivamente maggiore di $\ell - \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ si ha $|x_n - \ell - \varepsilon| < 0$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0$, l'insieme $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq \ell + \varepsilon\}$ è finito.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \bar{n} \in \mathbb{N}$, $\exists\, n \geq \bar{n} : |x_n - \ell| < \varepsilon$.

---

**5A]** (3pt.) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5\, 2^n - (\log_{10} n)^2 + \sqrt{n}\ (-4)^n}{-n^3\, 3^n - 2^{n+1} + 4^{n+\log_4 n}} =$$

---

**6A]** (3pt.) In $\mathbb{R}^2$, dotato della metrica euclidea, si considerino gli insiemi

$$A = \left\{(x,y) : y - x^2 \geq 1\right\} \ , \quad B = \left\{(x,y) : x = y = \frac{-1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\} \ , \quad E = A \cup B \, .$$

Allora:

$\mathrm{E}' =$ ; $\mathring{\mathrm{E}} =$ ; $\overline{\mathrm{E}}$ è compatto?......

**7A]** (5 pt.) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ \\ 2x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 4-2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Tracciare un grafico qualitativo delle funzioni $f(|x|)\,,\ |g(-x)|\,,\ (g \circ f)(x)\,.$

---

Il prossimo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

**(Bonus)**: Dimostrare, o confutare, la seguente affermazione:

"*In $\mathbb{R}$, dotato della metrica euclidea, ogni insieme aperto $G$ può essere rappresentato come unione (al più) numerabile di intervalli aperti e disgiunti.*"

**Cognome............................ Nome....................... Matricola..................**

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

21/11/2011 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90 minuti** versione B

**1B]** (3 punti) Le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione

$$2^{x+1} < 8 \cdot 2^{-\sqrt{2|x|}}$$

sono:

---

**2B]** (5 pt.) Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\alpha - e^{-n}}{n^{\alpha+2}+1} \, .$$

---

**3B]** (3pt.) Sia $E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = |x+1|\,(y-1);\ -2 \le x < 5,\ 1 < y < 4\}$. Allora

$\inf E =$ .......... ; $\sup E =$ .......... . Esistono: $\min E =$ ........... , $\max E =$ .......... ?

---

**4B]** (4 pt.) Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora:

**V** ☐ **F** ☐ $\exists\, \bar n \in \mathbb{N} : \forall\, n \ge \bar n,\ \forall \varepsilon > 0$ si ha $|x_n - \varepsilon| < \ell$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0$, l'insieme $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : x_n \ge \ell + \varepsilon\}$ è finito.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \bar n : \forall n \ge \bar n$ si ha $|x_n - \ell - \varepsilon| < 0$.

**V** ☐ **F** ☐ $\exists\, \bar n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0,\ \forall\, n \ge \bar n$ si ha $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

---

**5B]** (3pt.) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n-1} - n^2\, 3^n + n^3 \log_3 n}{n^4 2^n - 4^{n+1} + 3^{n+\log_3 n}} =$$

---

**6B]** (3 pt.) In $\mathbb{R}^2$, dotato della metrica euclidea, si considerino gli insiemi

$$B = \big\{(x,y) : y + x^2 \le -2\big\}\ ,\quad C = \left\{(x,y) : x = -y = \frac{-1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\}\ ,\quad H = B \cup C\,.$$

Allora:

$\mathrm{H}' =$ ; $\mathring{\mathrm{H}} =$ ; $\overline{\mathrm{H}}$ è compatto?......

**7B]** (5 pt.) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ \\ 2x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 4-2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Tracciare un grafico qualitativo delle funzioni $f(|x|)$, $|f(-x)|$, $(f \circ g)(x)$.

---

Il prossimo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

**(Bonus)**: Dimostrare, o confutare, la seguente affermazione:
"*In $\mathbb{R}$, dotato della metrica euclidea, ogni insieme aperto $G$ può essere rappresentato come unione (al più) numerabile di intervalli aperti e disgiunti.*"

**Cognome**............................ **Nome**........................ **Matricola**..................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

21/11/2011 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90 minuti** versione C

**1C**] (3 punti) Le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione

$$2^{x-1} > 4 \cdot 2^{-\sqrt{2|x|}}$$

sono:

---

**2C**] (5 pt.) Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4\alpha + e^{-n}}{1 + n^{\alpha+3}} \,.$$

---

**3C**] (3pt.) Sia $E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = (x-2)\,|y+2|\,;\ 2 < x < 4,\ -3 \leq y < 1\}$. Allora

$\inf E =$ .......... ; $\sup E =$ .......... . Esistono: $\min E =$ ........... , $\max E =$ .......... ?

---

**4C**] (4 pt.) Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora:

**V** ☐ **F** ☐ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n},\ \forall \varepsilon > 0$ si ha $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ si ha $|x_n - \ell - \varepsilon| < 0$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0$, $\{x_n\}$ è definitivamente minore di $\ell + \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \bar{n} \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq \bar{n} : |x_n - \ell| < \varepsilon$.

---

**5C**] (3pt.)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5 5^{-n} - n^2 5^n + 2^{n+3}\log_2 n}{(n+1)\,5^{n-1} - (2n^2+1)\,3^n + n\,(\log_2 n)^3} =$$

---

**6C**] (3pt.) In $\mathbb{R}^2$, dotato della metrica euclidea, si considerino gli insiemi

$$A = \big\{(x,y) : y - x^2 \geq 2\big\}\ ,\quad B = \left\{(x,y) : x = y = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\}\ ,\quad E = A \cup B\,.$$

Allora:

$\mathrm{E}' =$ ; $\mathring{\mathrm{E}} =$ ; $\overline{\mathrm{E}}$ è compatto?......

**7C]** (5 pt.) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ \\ 2x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 4-2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Tracciare un grafico qualitativo delle funzioni $|f(-x)|$ , $|g(|x|)|$ , $(g \circ f)(x)$ .

---

Il prossimo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

**(Bonus)**: Dimostrare, o confutare, la seguente affermazione:
"*In $\mathbb{R}$, dotato della metrica euclidea, ogni insieme aperto $G$ può essere rappresentato come unione (al più) numerabile di intervalli aperti e disgiunti.*"

**Cognome............................  Nome.......................  Matricola..................**

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

21/11/2011   proff. M.Salvatori, M.Vignati   durata: **90 minuti**   versione D

**1D]** (3 punti) Le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione

$$2^{x-1} > 2 \cdot 2^{-\sqrt{2|x|}}$$

sono:

---

**2D]** (5 pt.) Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\alpha + e^{-n}}{1 + n^{\alpha-1}} \,.$$

---

**3D]** (3pt.) Sia $E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = |x+2|\,(y-2);\ -3 \le x < 1,\ 2 < y < 4\}$ . Allora

$\inf E =$ .......... ; $\sup E =$ .......... . Esistono: $\min E =$ ........... , $\max E =$ .......... ?

---

**4D]** (4 pt.) Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora:

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \bar{n} \in \mathbb{N},\ \exists\, n \ge \bar{n} : |x_n - \ell| < \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \bar{n} : \forall n \ge \bar{n}$ si ha $|x_n - \ell| < \varepsilon/2$.

**V** ☐ **F** ☐ $\bar{n} \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0,\ \forall\, n \ge \bar{n}$ si ha $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0$, $\{x_n\}$ è definitivamente minore di $\ell + \varepsilon$.

---

**5D]** (3pt.) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,(\log_2 n)^3 + n^3 5^n - (2n^2+1)\,3^n}{n^5 5^{-n} + n^{-5} 5^n + 2^{n+3} \log_2 n} =$$

---

**6D]** (3pt.) In $\mathbb{R}^2$, dotato della metrica euclidea, si considerino gli insiemi

$$B = \left\{(x,y) : y - x^2 \ge 2\right\} \ ,\quad C = \left\{(x,y) : x = y = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\} \ ,\quad H = B \cup C \,.$$

Allora:

$\mathrm{H}' =$ ; $\mathring{\mathrm{H}} =$ ; $\overline{\mathrm{H}}$ è compatto?......

**7D]** (5 pt.) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ \\ 2x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 4-2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Tracciare un grafico qualitativo delle funzioni $f(-|x|)\,,\ g(|x|)\,,\ (f \circ g)(x)\,.$

---

Il prossimo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

**(Bonus)**: Dimostrare, o confutare, la seguente affermazione:

"*In $\mathbb{R}$, dotato della metrica euclidea, ogni insieme aperto $G$ può essere rappresentato come unione (al più) numerabile di intervalli aperti e disgiunti.*"

**Cognome**........................... **Nome**....................... **Matricola**..................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

21/11/2011 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90 minuti** versione E

**1E]** (3 punti) Le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione

$$2^{x-1} < 2^{-\sqrt{2|x|}}$$

sono:

---

**2E]** (5 pt.) Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4\alpha - e^{-n}}{n^{\alpha-2}+1} \; .$$

---

**3E]** (3pt.) Sia $E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = (x-1)\,|y+1|\, ;\ 1 < x < 4,\ -2 \le y < 5\}$ . Allora

$\inf E =$ .......... ; $\sup E =$ .......... . Esistono: $\min E =$ ........... , $\max E =$ .......... ?

---

**4E]** (4 pt.) Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora:

**V** ☐ **F** ☐ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \ge \bar{n},\ \forall \varepsilon > 0$ si ha $|x_n - \varepsilon| < \ell$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \{x_n\}$ è definitivamente maggiore di $\ell - \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0, \forall \bar{n} \in \mathbb{N}, \exists\, n \ge \bar{n} : |x_n - \ell| < \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \bar{n} :\ \forall n \ge \bar{n}$ si ha $|x_n - \ell - \varepsilon| < 0$.

---

**5E]** (3pt.)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 2^n - 4^{n+1} + 3^{n+\log_3 n}}{n^2\, 3^n - 2^{2n+3} + n^3 \log_3 n} =$$

---

**6E]** (3pt.) In $\mathbb{R}^2$, dotato della metrica euclidea, si considerino gli insiemi

$$A = \big\{(x,y) : y + x^2 \le -1\big\}\ ,\quad B = \left\{(x,y) : x = -y = \frac{-1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\}\ ,\quad E = A \cup B\ .$$

Allora:

$\mathrm{E}' =$ ; $\mathring{\mathrm{E}} =$ ; $\overline{\mathrm{E}}$ è compatto?......

**7E]** (5 pt.) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ \\ 2x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 4-2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Tracciare un grafico qualitativo delle funzioni $|f(-x)|$, $g(|x|)$, $(g \circ f)(x)$.

---

Il prossimo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

**(Bonus)**: Dimostrare, o confutare, la seguente affermazione:
"*In $\mathbb{R}$, dotato della metrica euclidea, ogni insieme aperto $G$ può essere rappresentato come unione (al più) numerabile di intervalli aperti e disgiunti.*"

**Cognome............................ Nome........................ Matricola..................**

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

21/11/2011 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **90 minuti** versione F

**1F]** (3 punti) Le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione

$$2^{x+1} < 16 \cdot 2^{-\sqrt{2|x|}}$$

sono:

---

**2F]** (5 pt.) Calcolare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\alpha - e^{-n}}{n^{\alpha-3}+1} .$$

---

**3F]** (3pt.) Sia $E = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha = |2x-3|\,(y+1)\,;\ 1 < x \leq 4,\ -1 < y < 2\}$. Allora

$\inf E =$ .......... ; $\sup E =$ .......... . Esistono: $\min E =$ ........... , $\max E =$ .......... ?

---

**4F]** (4 pt.) Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$. Allora:

**V** ☐ **F** ☐ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0,\ \forall\, n \geq \bar{n}$ si ha $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \bar{n},\ \forall \varepsilon > 0$ si ha $|x_n - \varepsilon| < \ell$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \bar{n} \in \mathbb{N},\ \exists\, n \geq \bar{n} : |x_n - \ell| < \varepsilon$.

**V** ☐ **F** ☐ $\forall \varepsilon > 0$, l'insieme $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq \ell + \varepsilon\}$ è finito.

---

**5F]** (3pt.) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\, 3^n - 2^{n+1} - \sqrt{n}\,(-4)^n}{n^5\, 2^n - (\log_{10} n)^2\ 3^n - 4^{n+\log_4 n}} =$$

---

**6F]** (3pt.) In $\mathbb{R}^2$, dotato della metrica euclidea, si considerino gli insiemi

$$B = \left\{(x,y) : y - x^2 \geq 2\right\}\ ,\quad C = \left\{(x,y) : x = y = \frac{-1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\}\ ,\quad H = B \cup C\ .$$

Allora:

$\mathrm{H}' =$ ; $\mathring{\mathrm{H}} =$ ; $\overline{\mathrm{H}}$ è compatto?......

**7F]** (5 pt.) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite come

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ \\ 2x+1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 4-2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Tracciare un grafico qualitativo delle funzioni $g(-|x|)\,,\ |g(-x)|\,,\ (f \circ g)(x)\,.$

---

Il prossimo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

**(Bonus)**: Dimostrare, o confutare, la seguente affermazione:
"*In* $\mathbb{R}$, *dotato della metrica euclidea, ogni insieme aperto* $G$ *può essere rappresentato come unione (al più) numerabile di intervalli aperti e disgiunti.*"