

Cognome..... Nome..... Matricola.....

C.I. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2012 proff. M.Salvatori, E. Valdinoci durata: **90 minuti** versione **A**

1A] (4 punti) Siano

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x-1} \ , \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \arctan \frac{x+1}{x-1} \ , \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}.$$

Allora, $\inf A = \dots\dots$; $\sup A = \dots\dots$; $\inf B = \dots\dots$; $\sup B = \dots\dots$

2A] (6 pt.) Sia

$$a_n = \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right)^n.$$

Allora, $\limsup a_n = \dots\dots$; $\liminf a_n = \dots\dots$

La classe limite della successione $\{a_n\}$ è l'insieme: $\dots\dots$

3A] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 4 - |x+3| & \text{se } x < 0 \\ 2 + \log(x+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(a)$ ha cardinalità uguale a tre.

4A] (6 pt.) Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \ , \ B = \left\{ \left(0, 3 - \frac{1}{n} \right) \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

e $C = A \cup B$. Allora

$$\overset{\circ}{C} = \dots\dots\dots$$

$$\partial C = \dots\dots\dots$$

$$C' = \dots\dots\dots$$

5A] (6 pt.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n - \sqrt{n})(2^{\cos(n^{-2})} - 2)}{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)} =$$

6A] (3+5 pt.) Siano

$$x_n = \frac{n^2 \log n + n \log^2 n - 5 \log^3 n}{3n \log^2 n + n^2 \log n + \log^3 n}, \quad y_n = \frac{n}{\log n}.$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^{y_n}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(Bonus) Sia A un sottinsieme di \mathbb{R} dotato della metrica euclidea con $A' = \emptyset$. Dimostrare che A è finito oppure numerabile.

Cognome..... Nome..... Matricola.....

C.I. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2012 proff. M.Salvatori, E. Valdinoci durata: **90 minuti** versione **B**

1B] (4 punti) Siano

$$A = \left\{ \frac{x+2}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \arctan \frac{x+2}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}.$$

Allora, $\inf A = \dots$; $\sup A = \dots$; $\inf B = \dots$; $\sup B = \dots$

2B] (6 pt.) Sia

$$a_n = \left(1 + \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} \right)^n.$$

Allora, $\limsup a_n = \dots$; $\liminf a_n = \dots$

La classe limite della successione $\{a_n\}$ è l'insieme: \dots

3B] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \begin{cases} |x+3| - 4 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - \log(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(a)$ ha cardinalità uguale a tre.

4B] (6 pt.) Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \left\{ \left(3 + \frac{1}{n}, 0 \right), \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

e $C = A \cup B$. Allora

$$\overset{\circ}{C} = \dots$$

$$\partial C = \dots$$

$$C' = \dots$$

5B] (6 pt.) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2-n) \log(1+n^{-3})}{3 - 3^{\cos(1/n)}} =$

6B] (3+5 pt.) Siano

$$x_n = \frac{2n^3 \log n - n \log^3 n + 3 \log^4 n}{4 \log^4 n + 5n \log^3 n + 2n^3 \log n}, \quad y_n = \frac{n^2}{\log^2 n}.$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^{y_n}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(Bonus) Sia A un sottinsieme di \mathbb{R} dotato della metrica euclidea con $A' = \emptyset$. Dimostrare che A è finito oppure numerabile.

Cognome..... Nome..... Matricola.....

C.I. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2012 proff. M.Salvatori, E. Valdinoci durata: **90 minuti** versione **C**

1C] (4 punti) Siano

$$A = \left\{ \frac{x+3}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \arctan \frac{x+3}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}.$$

Allora, $\inf A = \dots$; $\sup A = \dots$; $\inf B = \dots$; $\sup B = \dots$

2C] (6 pt.) Sia

$$a_n = \left(1 + \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n} \right)^n.$$

Allora, $\limsup a_n = \dots$; $\liminf a_n = \dots$

La classe limite della successione $\{a_n\}$ è l'insieme: \dots

3C] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 5 - |x+3| & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + \log(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(a)$ ha cardinalità uguale a tre.

4C] (6 pt.) Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \left\{ \left(4 + \frac{1}{n}, 0 \right), \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

e $C = A \cup B$. Allora

$$\overset{\circ}{C} = \dots$$

$$\partial C = \dots$$

$$C' = \dots$$

5C] (6 pt.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-3)^3 (4^{\cos(1/n)} - 4) \sin\left(\frac{2}{n}\right) =$$

6C] (3+5 pt.) Siano

$$x_n = \frac{2n \log^2 n + \log^3 n + 2n^2 \log n}{2 \log^3 n + 2n^2 \log n + n \log^2 n}, \quad y_n = \frac{n}{\log n}.$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^{y_n}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(Bonus) Sia A un sottinsieme di \mathbb{R} dotato della metrica euclidea con $A' = \emptyset$. Dimostrare che A è finito oppure numerabile.

Cognome..... Nome..... Matricola.....

C.I. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (I prova parziale)

16/11/2012 proff. M.Salvatori, E. Valdinoci durata: **90 minuti** versione **D**

1D] (4 punti) Siano

$$A = \left\{ \frac{x+4}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ \arctan \frac{x+4}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \right\}.$$

Allora, $\inf A = \dots$; $\sup A = \dots$; $\inf B = \dots$; $\sup B = \dots$

2D] (6 pt.) Sia

$$a_n = \left(1 + \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right)^n.$$

Allora, $\limsup a_n = \dots$; $\liminf a_n = \dots$

La classe limite della successione $\{a_n\}$ è l'insieme: \dots

3D] (4 pt.) Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2 + |x + 3| & \text{se } x < 0 \\ 4 - \log(x + 1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(a)$ ha cardinalità uguale a tre.

4D] (6 pt.) Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad B = \left\{ \left(0, 5 + \frac{1}{n} \right), \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

e $C = A \cup B$. Allora

$$\overset{\circ}{C} = \dots$$

$$\partial C = \dots$$

$$C' = \dots$$

5D] (6 pt.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5 - 5^{\cos(n^{-2})})(n^3 + 2)}{n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

6D] (3+5 pt.) Siano

$$x_n = \frac{\log^5 n + n^3 \log n + n \log^3 n}{n^3 \log n + 2n \log^3 n + 3 \log^5 n}, \quad y_n = \frac{n^2}{\log^2 n}.$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^{y_n}.$$

Scrivere uno svolgimento completo.

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(Bonus) Sia A un sottinsieme di \mathbb{R} dotato della metrica euclidea con $A' = \emptyset$. Dimostrare che A è finito oppure numerabile.