Cognome.......................... **Nome.....................** **Matricola.................**

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (II prova parziale)

24/1/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **120 minuti** versione A

1A] (3 punti) Se, per $x \to 2$, si ha

$$f(x) = \frac{7x-20}{2} + o(x-2)$$

allora la retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto di ascissa -3 ha coefficiente angolare uguale a:

2A] (4 pt.) Sia

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3(n+2)} - \sqrt{n^2(1+n^2)}}{\sqrt[3]{n^2(n^3-3)} \cdot \log(n+1)}.$$

Determinare gli esponenti p e q tali che, per $n \to +\infty$, si abbia

$$a_n \sim \frac{1}{n^p \log^q n}$$

Dedurre il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3A] (3 pt.) Sia $f(x) = (x+3)^{2+5\sin x}$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è:

4A] (4 pt.) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tale che

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \qquad ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 4. \tag{$*$}$$

Le seguenti affermazioni sono implicate da $(*)$?

Sì □ **No** □ $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = 4$; **Sì** □ **No** □ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Sì □ **No** □ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 4$; **Sì** □ **No** □ $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{2k} a_n = 0$

(+1 per ogni risposta corretta; −1 se sbagliata; 0 per ogni risposta non data.)

5A] (5 pt.) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x+3x^2) - \sin(2x) - 1 + \sqrt{1-2x^2}}{x^3} =$$

6A] (5 pt.) Determinare <u>tutti</u> gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della funzione reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \log\left(2 + e^{3x}\right) + \frac{5x - x^2 + 1}{x + 3}.$$

7A] (5 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tre volte derivabile in $x = 0$ e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = (a^2 - 5a + 4)x + a(a - 4)x^2 + (a - 1)x^3 + o(x^3).$$

Descrivere, al variare del parametro a, il comportamento del grafico di f in $(0, 0)$.
(Massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.)

8A] (5 pt.) Al variare dei parametri reali a e b sia

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\cos(3\log x) - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) La funzione è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se:

2) La funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se:

Questo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

(Bonus) Dimostrare, o confutare, le seguenti affermazioni:

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ed esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta.$$

Allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = \beta - \alpha$.

ii) Come sopra, ma con $\alpha = \beta$.

Cognome............................ Nome....................... Matricola..................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (II prova parziale)

24/1/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **120 minuti** versione B

1B (3 punti) Se, per $x \to -3$, si ha

$$f(x) = -\frac{9x+7}{4} + o(x+3)$$

allora la retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto di ascissa 5 ha coefficiente angolare uguale a:

2B] (4 pt.) Sia

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3(n^2+6)} - \sqrt[3]{n^2(n^3-3)}}{\sqrt{n^2(n^2+3)} \cdot \log(1+n^2)}.$$

Determinare gli esponenti p e q tali che, per $n \to +\infty$, si abbia

$$a_n \sim \frac{1}{n^p \log^q n}$$

Dedurre il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3B] (3 pt.) Sia $f(x) = (x+2)^{3+2\sin x}$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è:

4B] (4 pt.) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tale che

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \qquad ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pi. \tag{$*$}$$

Le seguenti affermazioni sono implicate da $(*)$?

Sì ☐ **No** ☐ $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = \pi$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Sì ☐ **No** ☐ $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{2k} a_n = 0$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi$

(+1 per ogni risposta corretta; −1 se sbagliata; 0 per ogni risposta non data.)

5B] (5 pt.) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x+x^2) - \sin(3x) - 1 + \sqrt{1+7x^2}}{x^3} =$$

6B] (5 pt.) Determinare tutti gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della funzione reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \log\left(3 + e^{2x}\right) + \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 3}.$$

7B] (5 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tre volte derivabile in $x = 0$ e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = (a^2 - 4)x + (a^2 + 5a + 6)x^2 + (a - 2)x^3 + o(x^3).$$

Descrivere, al variare del parametro a, il comportamento del grafico di f in $(0, 0)$. (Massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.)

8B] (5 pt.) Al variare dei parametri reali a e b sia

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\mathrm{Ch}(5 \log x) - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) La funzione è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se:

2) La funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se:

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(Bonus) Dimostrare, o confutare, le seguenti affermazioni:

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ed esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta.$$

Allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = \beta - \alpha$.

ii) Come sopra, ma con $\alpha = \beta$.

Cognome............................ **Nome**........................ **Matricola**..................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (II prova parziale)

24/1/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **120 minuti** versione C

1C] (3 punti) Se, per $x \to -1$, si ha

$$f(x) = \frac{5x-7}{3} + o(x+1)$$

allora la retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto di ascissa -4 ha coefficiente angolare uguale a:

2C] (4 pt.) Sia

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3(n+2)} - \sqrt{n^2(1+n^2)}}{\sqrt[3]{n^2(n^3-3)} \cdot \log(n+1)}.$$

Determinare gli esponenti p e q tali che, per $n \to +\infty$, si abbia

$$a_n \sim \frac{1}{n^p \log^q n}$$

Dedurre il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3C] (3 pt.) Sia $f(x) = (x+2)^{3+5\sin x}$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è:

4C] (4 pt.) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tale che

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \qquad ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = e. \tag{$*$}$$

Le seguenti affermazioni sono implicate da $(*)$?

Sì ☐ **No** ☐ $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = e$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Sì ☐ **No** ☐ $\lim_{n\to+\infty} a_n = e$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{2k} a_n = 0$

(+1 per ogni risposta corretta; -1 se sbagliata; 0 per ogni risposta non data.)

5C] (5 pt.) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x-x^2) - \sin(2x) - 1 + \sqrt{1+6x^2}}{x^3} =$$

6C] (5 pt.) Determinare tutti gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della funzione reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + e^{2x}\right) + \frac{6 + 2x - x^2}{x - 3}.$$

7C] (5 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tre volte derivabile in $x = 0$ e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = (a^2 - 1)x - (a^2 - 4a + 3)x^2 + (a + 1)x^3 + o(x^3).$$

Descrivere, al variare del parametro a, il comportamento del grafico di f in $(0, 0)$. (Massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.)

8C] (5 pt.) Al variare dei parametri reali a e b sia

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \le 1 \\ \dfrac{\cos(7 \log x) - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) La funzione è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se:

2) La funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se:

Questo esercizio verrà valutato solo se i precedenti sono stati tutti svolti in modo corretto.

(Bonus) Dimostrare, o confutare, le seguenti affermazioni:

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ed esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta.$$

Allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = \beta - \alpha$.

ii) Come sopra, ma con $\alpha = \beta$.

Cognome.............................. Nome......................... Matricola...................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (II prova parziale)

24/1/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **120 minuti** versione D

1D] (3 punti) Se, per $x \to 4$, si ha

$$f(x) = \frac{38 - 7x}{5} + o(x-4)$$

allora la retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto di ascissa 2 ha coefficiente angolare uguale a:

2D] (4 pt.) Sia

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3(n+2)} - \sqrt{n^2(n^2-4)}}{\sqrt[5]{(n^4-1)(n^2+3)} \cdot \log(n+2)}.$$

Determinare gli esponenti p e q tali che, per $n \to +\infty$, si abbia

$$a_n \sim \frac{1}{n^p \log^q n}$$

Dedurre il carattere della serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3D] (3 pt.) Sia $f(x) = (x+3)^{1+2\sin x}$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è:

4D] (4 pt.) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tale che

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \qquad ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pi. \tag{$*$}$$

Le seguenti affermazioni sono implicate da $(*)$?

Sì ☐ **No** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pi$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Sì ☐ **No** ☐ $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = \pi$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=k}^{2k} a_n = 0$

(+1 per ogni risposta corretta; −1 se sbagliata; 0 per ogni risposta non data.)

5D] (5 pt.) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x+x^2) - \sin(2x) - 1 + \sqrt{1+2x^2}}{x^3} =$$

6D] (5 pt.) Determinare <u>tutti</u> gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della funzione reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \log\left(2 + e^{3x}\right) + \frac{7x - x^2 + 1}{x + 3}.$$

7D] (5 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tre volte derivabile in $x = 0$ e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = (a^2 - 4)x + (a^2 + 5a + 6)x^2 + (a - 2)x^3 + o(x^3).$$

Descrivere, al variare del parametro a, il comportamento del grafico di f in $(0, 0)$.
(Massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.)

8D] (5 pt.) Al variare dei parametri reali a e b sia

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{\mathrm{Ch}(3\log x) - 1}{\sqrt[7]{x} - 1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) La funzione è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se:

2) La funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se:

Questo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

(Bonus) Dimostrare, o confutare, le seguenti affermazioni:

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ed esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta.$$

Allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = \beta - \alpha$.

ii) Come sopra, ma con $\alpha = \beta$.

Cognome............................ Nome....................... Matricola..................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (II prova parziale)

24/1/2012 proff. M.Salvatori, M.Vignati durata: **120 minuti** versione E

1E] (3 punti) Se, per $x \to -2$, si ha

$$f(x) = \frac{21+3x}{5} + o(x+2)$$

allora la retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto di ascissa 3 ha coefficiente angolare uguale a:

2E] (4 pt.) Sia

$$a_n = \frac{\sqrt[6]{n^2(n^2+6)} - \sqrt[6]{(n^4-1)}}{\sqrt[3]{n^4(n^2+1)} \cdot \log(n+3)}.$$

Determinare gli esponenti p e q tali che, per $n \to +\infty$, si abbia

$$a_n \sim \frac{1}{n^p \log^q n}$$

Dedurre il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3E] (3 pt.) Sia $f(x) = (x+5)^{2+3\sin x}$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è:

4E] (4 pt.) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tale che

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \qquad ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = e. \tag{$*$}$$

Le seguenti affermazioni sono implicate da $(*)$?

Sì ☐ **No** ☐ $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n = e$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Sì ☐ **No** ☐ $\lim_{n\to+\infty} a_n = e$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{2k} a_n = 0$

(+1 per ogni risposta corretta; −1 se sbagliata; 0 per ogni risposta non data.)

5E] (5 pt.) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+3x^2) - \sin(x) - 1 + \sqrt{1-5x^2}}{x^3} =$$

6E] (5 pt.) Determinare <u>tutti</u> gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della funzione reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \log\left(5 + e^{2x}\right) + \frac{3x + x^2 + 7}{x - 2}.$$

7E] (5 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tre volte derivabile in $x = 0$ e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = (a^2 - 1)x - (a^2 - 4a + 3)x^2 + (a + 1)x^3 + o(x^3).$$

Descrivere, al variare del parametro a, il comportamento del grafico di f in $(0, 0)$. (Massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.)

8E] (5 pt.) Al variare dei parametri reali a e b sia

$$f\,(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 1 \\ \\ \dfrac{\cos(7 \log x) - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) La funzione è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se:

2) La funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se:

Questo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

(Bonus) Dimostrare, o confutare, le seguenti affermazioni:

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ed esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta.$$

Allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = \beta - \alpha$.

ii) Come sopra, ma con $\alpha = \beta$.

Cognome.............................. Nome......................... Matricola...................

c.l. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (II prova parziale)

24/1/2012   proff. M.Salvatori, M.Vignati   durata: **120 minuti**   versione F

1F] (3 punti) Se, per $x \to 3$, si ha

$$f(x) = \frac{2x - 27}{3} + o(x - 3)$$

allora la retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto di ascissa -7 ha coefficiente angolare uguale a:

2F] (4 pt.) Sia

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3(n^2+6)} - \sqrt[3]{n^2(3+n^3)}}{\sqrt{n^2(n^2+3)} \cdot \log(n^2+1)}.$$

Determinare gli esponenti p e q tali che, per $n \to +\infty$, si abbia

$$a_n \sim \frac{1}{n^p \log^q n}$$

Dedurre il carattere della serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3F] (3 pt.) Sia $f(x) = (x+2)^{3+5\sin x}$. Allora l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ è:

4F] (4 pt.) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tale che

$$a_n > 0 \quad \forall\, n \geq 1 \qquad ; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 4. \tag{$*$}$$

Le seguenti affermazioni sono implicate da $(*)$?

Sì ☐ **No** ☐ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 4 \quad$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

Sì ☐ **No** ☐ $\quad \lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = 4 \quad$; **Sì** ☐ **No** ☐ $\quad \lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=k}^{2k} a_n = 0$

(+1 per ogni risposta corretta; -1 se sbagliata; 0 per ogni risposta non data.)

5F] (5 pt.) $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+3x+2x^2) - \sin(3x) - 1 + \sqrt{1+5x^2}}{x^3} =$

6F] (5 pt.) Determinare <u>tutti</u> gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della funzione reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \log\left(2 + e^{5x}\right) + \frac{2x - x^2 + 7}{x - 2}.$$

7F] (5 pt.) Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tre volte derivabile in $x = 0$ e tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = (a^2 - 5a + 4)x + a(a - 4)x^2 + (a - 1)x^3 + o(x^3).$$

Descrivere, al variare del parametro a, il comportamento del grafico di f in $(0, 0)$. (Massimo, minimo, flesso, flesso a tangente orizzontale.)

8F] (5 pt.) Al variare dei parametri reali a e b sia

$$f\,(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\cos(5\log x) - 1}{\sqrt[7]{x} - 1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

1) La funzione è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se:

2) La funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se:

Questo esercizio verrà valutato <u>solo</u> se i precedenti sono stati <u>tutti</u> svolti in modo corretto.

(Bonus) Dimostrare, o confutare, le seguenti affermazioni:

i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ed esistano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha \qquad ; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta.$$

Allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = \beta - \alpha$.

ii) Come sopra, ma con $\alpha = \beta$.